UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.1 - M.A.S.S - Algèbre S1 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr
Page Perso : http ://www.univ-tlse2.fr/grimm/couvreur

Devoir Maison

Exercice 1. Implications et équivalences

Dans les questions suivantes, les nombres $a, b, c, d, p, p_1, \ldots, p_n$ sont des entiers relatifs. Remplir si possible les trous par les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$. (Attention, la bonne réponse peut être qu'aucun de ces symboles ne convient).

(i)	$pgcd(p_1, \ldots, p_n) = 1$	les entiers $p_1, \ldots, p_n$ sont deux à deux premiers entre eux.
(ii)	$p \mid a$ ou $p \mid b$	$p \mid ab$
(iii)	$p \mid a$ ou $p \mid b$	$p \mid ab$ et p et un nombre premier.
(iv)	$a = 8$	$a \equiv 3 \bmod 5$.
(v)	$c \mid a$ et $c \mid b$	$c \mid \mathrm{pgcd}(a, b)$.
(vi)	$a \nmid b$	$\exists p \in \mathbb{Z},\ b \neq ap$.
(vii)	$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ d = au + bv$	$d = a \wedge b$.

Exercice 2. Quelques problèmes de divisibilité.

Les questions de cet exercice sont indépendentes. Voici pour vous aider un type de raisonnement classique : Soit p un nombre pair, alors $p(p+2)$ est divisble par 8. En effet, comme p est pair p et $p+2$ sont tous deux divisbles par deux. De plus comme il s'agit de deux nombres pairs **successifs**, l'un des deux est divisble par 4. Conclusion, j'ai deux nombres, l'un d'eux est divisible par 2 et l'autre par 4 leur produit est donc divisible par 8.

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$, montrer que le nombre $a(a^2 - 1)$ est divisible par 6.
2. Même question avec $a(a^{2n} - 1)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 6 \mid n^3 - n$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 30 \mid n^5 - n$.
7. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers. Montrer que $(n-1) \mid (n^m - 1)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair, montrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pair, donner le reste de $7^n + 1$ par la division par 8.
10. Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a^2 \mid b^2$. Montrer que $a \mid b$.

Exercice 3. Problèmes de congruences.

1. Montrer que si le reste par la division euclidienne d'un enier n par 15 est égal à 6, alors le rete de la division de n par 18 ne peut pas être égal à 5. (Commencer par traduire cette phrase en termes de congruences.)
2. Montrer que si un entier n est de la forme $n = 6k + 5$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k' - 1$.
3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
4. Montrer que si un entier n est de la forme $n = 5k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 5k' + 1$.
5. Montrer que le carré d'un nombre entier est toujours congru à 0 ou à 1 modulo 4.
6. Montrer que si un nombre entier naturel est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième et qu'il est nécessairement congru à 0 ou 1 modulo 7.

Exercice 4. L'agorithme d'Euclide dans $\mathbb{Z}$.

Calculer le pgcd de a et b dans les cas suivants. Puis calculer des entiers u et v tels que : $au + bv = 1$.

1. $a = 148$ et $b = 28$
2. $a = 237$ et $b = 27$
3. $a = 91$ et $b = 911$
4. $a = 126$ et $b = 230$
5. $a = 18480$ et $b = 9828$

Exercice 5. fractions rationnelles

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{X^2+3X+5}{X^2+X-2} \qquad G_1 = \frac{X^4+1}{(X+1)(X+2)} \qquad H_1 = \frac{X^2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$$F_2 = \frac{X}{(X-1)^3(X-2)} \qquad G_2 = \frac{2X+1}{(X^2-1)^3} \qquad H_2 = \frac{X^4+X^3+1}{X^3+1}$$

$$F_3 = \frac{X^3}{(X^2+1)(X^2+X+1)} \qquad G_3 = \frac{X^3+X+3}{(X^2+X+1)^2} \qquad H_3 = \frac{3X+2}{(X+1)^2(X^2+2X+5)}$$