**UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique** **Année 2005-06**
L.1 - M.A.S.S - Algèbre S1 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr

# Fiche d'exercices 1.

N.B. Les exercices marqués par un ★ sont plus difficiles.

## 1 Logique et arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

**Exercice 1. Vrai ou Faux.**

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$. En justifiant votre réponse, dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $a|b$ et $a|c$, alors $c^2 - 2b$ est un multiple de $a$.
2. S'il existe $u$ et $v$ deux entiers tels que $au + bv = d$ alors $a \wedge b = |d|$.
3. Si $a$ est premier avec $b$, alors $a$ est premier avec $b^3$.
4. Si $a|b + c$ et $a|b - c$, alors $a|b$ et $a|c$.
5. Si 19 divise $ab$, alors 19 divise $a$ ou 19 divise $b$.
6. Si $a$ est multiple de $b$ et si $c$ est multiple de $d$., alors $a + b$ est multiple $c + d$.
7. Si 4 ne divise pas $bc$, alors $b$ ou $c$ est impair.
8. Si $a|b$ et $b \nmid c$, alors $a \nmid c$.
9. Si 6 divise $b^2$, alors 36 divise $b^2$.
10. Si 5 divise $b^2$, alors 25 divise $b^2$.
11. Si 12 divise $b^2$, alors 9 divise $b^2$.
12. Si 12 divise $b^2$, alors 36 divise $b^2$.
13. Si 91 divise $ab$, alors 91 divise $a$ ou 91 divise $b$.
14. $ab$ =pgcd$(a, b)$.ppcm$(a, b)$.
15. pgcd$(a, b, c, d)$=pgcd(pgcd$(a, b)$,pgcd$(c, d)$).
16. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, si $a^m \wedge b^m = 1$, alors $a \wedge b = 1$

**Exercice 2. Implications et équivalences**

Dans les questions suivantes, les nombres $a, b, c, d, p, p_1, \ldots, p_n$ sont des entiers relatifs. Remplir si possible les trous par les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$. (Attention, la bonne réponse peut être qu'aucun de ces symboles ne convient).

| | | |
|---|---|---|
| $(i)$ | $\mathrm{pgcd}(\mathrm{p}_1, \ldots, p_n) = 1$ | les entiers $p_1, \ldots, p_n$ sont deux à deux premiers entre eux. |
| $(ii)$ | $p|a$ ou $p|b$ | $p|ab$ |
| $(iii)$ | $p|a$ ou $p|b$ | $p|ab$ et p et un nombre premier. |
| $(iv)$ | $a = 8$ | $a \equiv 3 \mod 5$. |
| $(v)$ | $c|a$ et $c|b$ | $c|\mathrm{pgcd}(a, b)$. |
| $(vi)$ | $a \nmid b$ | $\exists p \in \mathbb{Z},\ b \neq ap$. |
| $(vii)$ | $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ d = au + bv$ | $d = a \wedge b$. |

**Exercice 3. Quelques problèmes de divisibilité.**

Les questions de cet exercice sont indépendentes

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$, montrer que le nombre $a(a^2-1)$ est divisible par 6.
2. Même question avec $a(a^{2n}-1)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 24 | n(n+1)(n+2)(n+3)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 120 | n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 6 | n^3 - n$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 30 | n^5 - n$.
7. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers. Montrer que $(n-1)|(n^m-1)$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair, montrer que le nombre $7^n+1$ est divisible par 8.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pair, donner le reste de $7^n+1$ par la division par 8.
10. Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a^2 | b^2$. Montrer que $a|b$.

**Exercice 4. La preuve par 9.★**

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $n'$ le nombre obtenu en additionnant les termes du développement décimal de $n$. Par exemple si $n = 4538$, $n' = 4+5+3+8 = 20$.

1. Montrer que $n$ et $n'$, ont même reste par la division par 9, en d'autres termes, que $n \equiv n' \mod 9$.
2. En déduire un algorithme rapide de calcul du reste par la division par 9.
3. Expliquer pourquoi la méthode dite de *la preuve par 9*, permet de vérifier que le résultat d'une multiplication est juste. (Si vous ne connaissez pas cette méthode, votre enseigant se fera un plaisir de vous l'expliquer.)
4. Trouver un algorithme du même genre pour calculer le reste d'un nombre par la division par 11.

**Exercice 5.**

Soient $a, b, c$ des entiers.

1. Montrer que si $d =$pgcd$(a,b)$, alors $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ a = ud,\ b = vd$ et $u \wedge v = 1$.
2. Montrer que pgcd$(ca, cb)$=$|c|$pgcd$(a,b)$.
3. Montrer que si pgcd$(a,b)$= 1et si $c|b$, alors pgcd$(c,a)$= 1.
4. Montrer que $a \wedge bc = 1 \Rightarrow a \wedge b = a \wedge c = 1$.
5. Montrer que si $b \wedge c = 1$ alors $a \wedge bc = (a \wedge b)(a \wedge c)$.
6. Montrer que pgcd$(a,b)$=pgcd$(a+b$,ppcm$(a,b))$.

**Exercice 6. Problèmes de congruences.**

1. Montrer que si le reste par la division euclidienne d'un enier $n$ par 15 est égal à 6, alors le rete de la division de $n$ par 18 ne peut pas être égal à 5. (Commencer par traduire cette phrase en termes de congruences.)
2. Montrer que si un entier $n$ est de la forme $n = 6k+5$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 3k'-1$.
3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
4. Montrer que si un entier $n$ est de la forme $n = 5k+1$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 5k'+1$.
5. Montrer que le carré d'un nombre entier est toujours congru à 0 ou à 1 modulo 4.
6. Montrer que si un nombre entier naturel est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puisance sixième et qu'il est nécessairement congru à 0 ou 1 modulo 7.

**Exercice 7. L'agorithme d'Euclide dans $\mathbb{Z}$.**

Calculer le pgcd de $a$ et $b$ dans les cas suivants. Puis calculer des entiers $u$ et $v$ tels que : $au + bv = 1$.

1. $a = 148$ et $b = 28$
2. $a = 237$ et $b = 27$
3. $a = 91$ et $b = 911$
4. $a = 126$ et $b = 230$
5. $a = 18480$ et $b = 9828$