Examen d'algèbre, seconde session.

Durée, deux heures.
Les documents et les calculatrices sont interdits,
à l'exception de la feuille A4.

Le barème est approximatif, il pourra être légèrement modifié à postériori. Il vous donnera cependant une idée du temps que vous devez consacrer à chaque exercice. Une attention particulière sera apportée à la qualité de votre rédaction et à la rigueur de vos raisonnements. Bonne chance.

Exercice 1. Vrai ou faux.(5 pts)

1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.
   (a) $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3, \quad a|b \text{ et } a|c \ \Rightarrow\ a|b-c.$
   (b) $\forall b \in \mathbb{Z}, \quad 12|b^2 \ \Rightarrow\ 12|b.$
   (c) $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a^2 \equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 4 \mod 5.$
   (d) $\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3, \quad d = \text{pgcd}(a,b) \ \Leftrightarrow d|a \text{ et } d|b.$
   (e) $\forall b \in \mathbb{Z}, \quad 5|b^2 \ \Leftrightarrow 25|b^2.$
   (f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 120|n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$
   (g) $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \text{deg}P \geq 3 \ \Rightarrow\ P$ est réductible.
   (h) $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad P(\alpha) = 0 \ \Leftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0.$
2. Ecrire la négation des assertions 1a et 1f.

Exercice 2. (4 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre $2^n + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n n'est pas divisible par 2.
2. Ecrivez en langage mathématique l'assertion suivante : "a_n est divisible par 3 si et seulement si n est impair".
3. Montrer que l'assertion de la question précédente est vraie.
4. Montrer que a_n est divisible par 5 si et seulement si n est de la forme $n = 4p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que a_n n'est jamais divisible par 15.
6. Existe-t-il un entier naturel n tel que $1995(2^{1995} + 1) = a_n$?

Exercice 3. (2 pts)

Trouver un triplet de réels vérifiant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} xyz & = & -10 \\ x+y+z & = & 4 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} & = & \dfrac{129}{100} \end{array} \right.$$

Exercice 4. Fractions rationnelles. (3 pts)

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes.
$$A(X) = \frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1} \qquad B(X) = \frac{4X^2 + 8X + 9}{X^3 - 3X + 2}$$
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle suivante.
$$\Gamma(X) = \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$$

Exercice 5. (6 pts)

1. Montrer **sans les calculer** que la somme des solutions de l'équation $z^4+1=0$ est nulle. A quoi est égal leur produit ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+1=0$, et représenter ses solutions dans le plan complexe.
3. Soit ω la solution de l'équation $z^4+1=0$ dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives. Montrer alors que les autres solutions de l'équation sont $-\omega, i\omega$ et $-i\omega$.
4. Décomposer le polynôme $P = X^4+1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire sa décomposition dans $\mathbb{R}[\mathbb{X}]$.
5. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle,

$$F(X) = \frac{1+X+X^4+X^5}{1+X^4}$$

.