UTM - Département de Mathématiques et d'Informatique **Année 2005-06**
L.1 - M.A.S.S - Algèbre S1 - session 2
Alain COUVREUR : couvreur@univ-tlse2.fr

Fiche d'exercices 3.

N.B. Les exercices marqués par un ★ sont plus difficiles.

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (suite).

Exercice 1. Un peu de formalisme.

Ecrire avec des symboles mathématiques les ensembles suivants :

1. L'ensemble des entiers relatifs dont le triple est congru à 3 modulo 7.
2. L'ensemble des inverses d'entiers naturels multiples de 4 non nuls.
3. L'ensemble des entiers naturels qui sont multiples de 3 ou congrus à 7 modulo 10.
4. L'ensemble des entiers naturels congrus à 4 modulo 11 et à 6 modulo 61.
5. L'ensemble des entiers relatifs négatifs dont le carré est une différence de deux cubes d'entiers.

Exercice 2. Questions en vrac.

1. Existe-t-il un couple d'entiers relatifs (m, n) tel que $m + n = 101$ et $pgcd(m, n) = 3$?
2. Montrer que le carré d'un nombre impair est congru à 1 modulo 8.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $6|n^3 - n$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $30|n^5 - n$.
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $60|n^2(n^4 - 1)$.
6. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $42|n(n^6 - 1)$.
7. Soient m et n deux entiers impairs, montrer que $m^2 + n^2$ est pair mais n'est pas divisible par 4.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 49 divise $2^{3n+3} - 7n - 8$.

Exercice 3.

Montrer que si pour un $n \in \mathbb{N}$, les entiers $42n + 37$ et $7n + 4$ sont tous deux multiples d'un entier naturel a, alors a divise 13. Quelles sont alors les différentes valeurs possibles de n ?

Exercice 4.

Montrer que si les entiers naturels a et b vérifient : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in \mathbb{N}$ alors $a = b$ et $a = 1$ ou 2.

Exercice 5.

Trouver tous les $a \in \mathbb{Z}$ tels que $10|a^{10} + 1$.

Exercice 6. Le théorème chinois.

L'armée de l'empereur compte entre 1000 et 3000 soldats. Si on les regroupe par groupes de 11, il n'en reste pas. Par groupes de 9 il en reste 5 et par groupe de 13 il en reste 8. Combien y a-t-il exactement de soldats ?

2 Polynômes.

Exercice 7. Divisibilité

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, montrer que $X - a$ divise $X^{2n+1} + a^{2n+1}$.
2. Montrer que $(X-1)^2$ divise $X^{n+1} - X^n - X + 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.
4. Quelles conditions doit vérifier $n \in \mathbb{N}^*$, pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 8. Racines, fonctions symétriques.

1. Montrer que le polynôme $P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ n'a pas de racines multiples.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 - 7X - 3$. Déterminer les réels a, b et c tels que P admette -1 comme racine triple.
3. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans le polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$, $n > 1$? (Le résultat peut dépendre de la valeur de n).
4. Déterminer les réels a, b et c tels que $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$, admette une racine réelle d'ordre 4 stricement négative.
5. On considère les polynômes $P = X^4 - X + s$ et $Q = X^2 - sX + 1$. Trouver le réel positif s pour que P soit divisible par Q.

Exercice 9. Fonctions symétriques (suite)

Soient x_1, x_2 et x_3 les racines non nulles du polynôme $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. Calculer en fonction de a, b et c les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \\ S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

Exercice 10. Fonctions symétriques (fin)

1. Soient a, b, c les racines de $X^3 - X + 1$. Calculer $a^7 + b^7 + c^7$.
2. Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$ sont *les* racines.
3. Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c$. Calculer le polynôme unitaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dont x_1^2, x_2^2, x_3^2 sont *les* racines.
4. Trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $2X^3 + 5X^2 - X + \lambda$ ait une racine de module 1.