

Optimisation, Jeux et applications à l'interprétation abstraite

Assalé ADJÉ

CEA Saclay (MeASI), LIX Ecole Polytechnique
Financé par une bourse Ile-de-France (2008-2010)
INRIA Saclay & CMAP Ecole Polytechnique

29 avril 2011

Contexte

Les systèmes informatiques rythment notre vie :



Certains systèmes sont complexes et critiques :



et nécessitent une analyse poussée.

But de l'analyse statique de programmes :

Extraire **automatiquement** des propriétés (**invariants**) sur les programmes sans les exécuter.

```
int x;
int y;
x=5;
y=1;
while (y<=x){
  if (x<0)
    x=x+1;
  else
    x=x-1;
}
```

Valeurs de x ?

```
int x;
int y;
x=5;
y=1;
while (x>0){
  x=y-1;
  while (y<=x){
    x=x+1;
    y=x-2;
  }
}
```

Parcourt-on la boucle interne ?

But de l'analyse statique de programmes :

Extraire **automatiquement** des propriétés (**invariants**) sur les programmes sans les exécuter.

```
int x;
int y;
x=5;
y=1;
while (y<=x){
  if (x<0)
    x=x+1;
  else
    x=x-1;
}
```

Valeurs de x ?

```
int x;
int y;
x=5;
y=1;
while (x>0){
  x=y-1;
  while (y<=x){
    x=x+1;
    y=x-2;
  }
}
```

Parcourt-on la boucle interne ?

Les deux propriétés à extraire sont **numériques** :

on parle d'**invariants numériques**

Problème de l'analyse statique

Ici :

Trouver des bornes (les meilleures) sur les valeurs prises par les variables d'un programme à certains points de contrôle (\sim instructions).

Problème de l'analyse statique

Ici :

Trouver des bornes (les meilleures) sur les valeurs prises par les variables d'un programme à certains points de contrôle (\sim instructions).

Ce problème est indécidable !

Problème de l'analyse statique

Ici :

Trouver des bornes (les meilleures) sur les valeurs prises par les variables d'un programme à certains points de contrôle (\sim instructions).

Ce problème est indécidable !

Une solution : l'interprétation abstraite (Cousot & Cousot 77)

Problème de l'analyse statique

Ici :

Trouver des bornes (les meilleures) sur les valeurs prises par les variables d'un programme à certains points de contrôle (\sim instructions).

Ce problème est indécidable !

Une solution : l'interprétation abstraite (Cousot & Cousot 77)

L'interprétation abstraite consiste à donner une sur-approximation calculable sûre des bornes.

Problème de l'analyse statique

Ici :

Trouver des bornes (les meilleures) sur les valeurs prises par les variables d'un programme à certains points de contrôle (\sim instructions).

Ce problème est indécidable !

Une solution : l'interprétation abstraite (Cousot & Cousot 77)

L'interprétation abstraite consiste à donner une sur-approximation calculable sûre des bornes.

Inconvénients : fausses alarmes (perte de précision).

Principe de l'interprétation abstraite

Un simple programme C

```
int x,  
x=0           //1  
while(x<=99){ //2  
    x=1+x;    //3  
}             //4
```

Pb : Trouver la plus petite sur-approximation des valeurs de la variable x à chaque point de contrôle.

Principe de l'interprétation abstraite

Un simple programme C (à gauche) et les équations sémantiques abstraites associées (à droite)

<code>int x,</code>		$x_1 =$	$\{0\}$
<code>x=0</code>	<code>//1</code>		
<code>while(x<=99){</code>	<code>//2</code>	$x_2 =$	$(x_1 \cup x_3) \cap]-\infty, 99]$
<code>x=1+x;</code>	<code>//3</code>	$x_3 =$	$1 + x_2$
<code>}</code>	<code>//4</code>	$x_4 =$	$(x_1 \cup x_3) \cap [100, +\infty[$

Trouver la plus petite sur-approximation des valeurs de la variable x à chaque point de contrôle.

→ Trouver le plus petit vecteur d'intervalles x qui satisfait l'équation de point fixe.

Résolution du problème de point fixe

Algorithme classique en analyse statique :

Itérations de Kleene :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F^k(\perp) = \text{lfp}(F)$$

avec $\perp = \emptyset$ (au sens des intervalles) et pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F(x) = \begin{pmatrix} [0, 0] \\ (x_1 \cup x_3) \cap]-\infty, 99] \\ 1 + x_2 \\ (x_1 \cup x_3) \cap [100, +\infty[\end{pmatrix}$$

Résolution du problème de point fixe

Algorithme classique en analyse statique :

Itérations de Kleene :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F^k(\perp) = \text{lfp}(F)$$

avec $\perp = \emptyset$ (au sens des intervalles) et pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$F(x) = \begin{pmatrix} [0, 0] \\ (x_1 \cup x_3) \cap]-\infty, 99] \\ 1 + x_2 \\ (x_1 \cup x_3) \cap [100, +\infty[\end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\text{lfp}(F) = \begin{pmatrix} [0, 0] \\ [0, 99] \\ [1, 100] \\ [100, 100] \end{pmatrix} = F^{99}(\perp)$$

Inconvénient de Kleene

Problème : Algorithme de Kleene méthode lente...nécessite des techniques d'accélération qui dégrade la précision de l'invariant.

Inconvénient de Kleene

Problème : Algorithme de Kleene méthode lente...nécessite des techniques d'accélération qui dégrade la précision de l'invariant.

Idée :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \{0\} \\
 x_2 &= (x_1 \cup x_3) \cap]-\infty, 99] \\
 x_3 &= 1 + x_2 \\
 x_4 &= (x_1 \cup x_3) \cap [100, +\infty[
 \end{aligned}$$

En écrivant un intervalle $I = [-i^-, i^+]$ et après réductions :

Inconvénient de Kleene

Problème : Algorithme de Kleene méthode lente...nécessite des techniques d'accélération qui dégrade la précision de l'invariant.

Idée :

$$\begin{aligned}x_1 &= \{0\} \\x_2 &= (x_1 \cup x_3) \cap]-\infty, 99] \\x_3 &= 1 + x_2 \\x_4 &= (x_1 \cup x_3) \cap [100, +\infty[\end{aligned}$$

En écrivant un intervalle $I = [-i^-, i^+]$ et après réductions :

Equation de point fixe non linéaire

$$\begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^- - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^+ + 1))) \end{pmatrix}.$$

Interprétation jeux

Un jeu répété simple avec option d'arrêt :

Le jeu sur un coup (date k) :

1. (Min) peut décider d'arrêter et payer 99 (le jeu s'arrête) ou laisse joueur (Max);
2. (Max) peut arrêter le jeu et gagner 0 (le jeu s'arrête) ou continue à jouer et gagne 1.

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline G + 1 & 0 \\ \hline 99 & 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} v^0 = 0 \\ v^k = \min(\max(v^{k-1} + 1, 0), 99) \end{array} \right.$$

$v^\infty = 99$ (99 Itérations sur les valeurs (Kleene) !)

Correspondances entre théorie des jeux et interprétation abstraite

Jeux stochastiques	Interprétation abstraite
Processus markovien	Programme
Opérateur de Shapley	Fonction sémantique abstraite
Problème en horizon n	n pas logiques
Valeur limite à horizon n	Invariant optimal
Algorithme de Shapley	Itération de Kleene

Problème :

En jeux le point fixe de l'opérateur est souvent unique (cas escompté), **pas en interprétation abstraite!**

Approche contrôle/jeux

Une alternative à l'itération sur les valeurs : [Itérations sur les politiques \(IP\)](#)...

- Howard (60) (contrôle stochastique) ;
- Hoffman et Karp (66) (jeux stochastiques).

La méthode est rapide en pratique (mais exponentielle dans certains cas (Friedmann 09)).

Etendu par Costan, Gaubert, Goubault, Martel and Putot (CAV'05) pour le calcul de point fixe en analyse statique.

Brefs rappels de IP en jeux

$$f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

$$f_i = \inf_{a \in A(i)} \sup_{b \in B(i,a)} r_i^{a,b} + M_i^{a,b},$$

Brefs rappels de IP en jeux

$$f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

$$f_i = \inf_{a \in A(i)} \sup_{b \in B(i,a)} r_i^{a,b} + M_i^{a,b},$$

Une **stratégie** (politique) π est une application qui associe à chaque état i une action : $\pi(i) \in A(i)$.

Brefs rappels de IP en jeux

$$f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

$$f_i = \inf_{a \in A(i)} \sup_{b \in B(i,a)} r_i^{a,b} + M_i^{a,b},$$

Une **stratégie** (politique) π est une application qui associe à chaque état i une action : $\pi(i) \in A(i)$.

On considère le jeu à un joueur :

$$f_i^\pi = \sup_{b \in B(i, \pi(i))} r_i^{\pi(i), b} + M_i^{\pi(i), b}.$$

Brefs rappels de IP en jeux

$$f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

$$f_i = \inf_{a \in A(i)} \sup_{b \in B(i,a)} r_i^{a,b} + M_i^{a,b},$$

Une **stratégie** (politique) π est une application qui associe à chaque état i une action : $\pi(i) \in A(i)$.

On considère le jeu à un joueur :

$$f_i^\pi = \sup_{b \in B(i, \pi(i))} r_i^{\pi(i), b} + M_i^{\pi(i), b}.$$

L'ensemble $\{f^\pi \mid \pi \text{ stratégie}\}$ a la **propriété de sélection inférieure** :
 $\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \pi$ telle que $f(x) = f^\pi(x)$.

Brefs rappels de IP en jeux

$$f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

$$f_i = \inf_{a \in A(i)} \sup_{b \in B(i,a)} r_i^{a,b} + M_i^{a,b},$$

Une **stratégie** (politique) π est une application qui associe à chaque état i une action : $\pi(i) \in A(i)$.

On considère le jeu à un joueur :

$$f_i^\pi = \sup_{b \in B(i, \pi(i))} r_i^{\pi(i), b} + M_i^{\pi(i), b}.$$

L'ensemble $\{f^\pi \mid \pi \text{ stratégie}\}$ a la **propriété de sélection inférieure** :

$\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \pi$ telle que $f(x) = f^\pi(x)$.

Idee : Pour résoudre $f(x) = x$, nous résolvons une suite de problème à un joueur $f^\pi(x) = x$.

En analyse statique : retour à l'exemple 1

```

int x,
x=0           //1
while(x<=99){ //2
    x=1+x;    //3
}             //4

```

$$F \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^- - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^+ + 1))) \end{pmatrix}.$$

Nous commençons par :

$$f^{\pi^0} \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^- - 1)) \\ 99 \end{pmatrix}.$$

Le plus petit point fixe est (0, 99) (Programmation linéaire...).

En analyse statique : retour à l'exemple 1

```

int x,
x=0           //1
while(x<=99){ //2
    x=1+x;    //3
}             //4

```

$$F \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^- - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^+ + 1))) \end{pmatrix}.$$

Nous commençons par :

$$f^{\pi^0} \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^- - 1)) \\ 99 \end{pmatrix}.$$

Le plus petit point fixe est $(0, 99)$ (Programmation linéaire...).

Ce point est aussi un point fixe de f donc IP s'arrête. (0 iteration)

Exemple 2 ($x = 1+x \rightsquigarrow x = 1-x$)

```

int x,
x=0           //1
while(x<=99){ //2
    x=1-x;    //3
}             //4

```

L'équation de point fixe devient :

$$f \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^- + 1))) \end{pmatrix}.$$

Nous commençons par :

$$f^{\pi^0} \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ 99 \end{pmatrix},$$

Exemple 2 ($x = 1+x \rightsquigarrow x = 1-x$)

```

int x,
x=0           //1
while(x<=99){ //2
    x=1-x;    //3
}             //4

```

L'équation de point fixe devient :

$$f \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^- + 1))) \end{pmatrix}.$$

Nous commençons par :

$$f^{\pi^0} \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ 99 \end{pmatrix},$$

IP retourne $(98, 99)$ c.à.d. $x_2 = [-98, 99]$,

Exemple 2 ($x = 1+x \rightsquigarrow x = 1-x$)

```

int x,
x=0           //1
while(x<=99){ //2
    x=1-x;    //3
}             //4

```

L'équation de point fixe devient :

$$f \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^- + 1))) \end{pmatrix}.$$

Nous commençons par :

$$f^{\pi^0} \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ 99 \end{pmatrix},$$

IP retourne $(98, 99)$ c.à.d. $x_2 = [-98, 99]$,

Mais $(0, 1)$ est le plus petit point fixe c.à.d. $x_2 = [0, 1]$.

Domaines classiques en interprétation abstraite

Dans l'exemple : Invariants numériques générés=intervalles.

Domaines classiques en interprétation abstraite

Dans l'exemple : Invariants numériques générés=intervalles.

En général, domaines numériques abstraits sont des treillis complets.

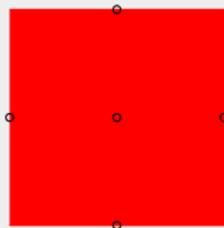
Domaines classiques en interprétation abstraite

Dans l'exemple : Invariants numériques générés=intervalles.

En général, domaines numériques abstraits sont des treillis complets.

Domaines numériques classiques :

- Intervalles ;



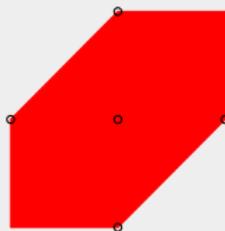
Domaines classiques en interprétation abstraite

Dans l'exemple : Invariants numériques générés=intervalles.

En général, domaines numériques abstraits sont des treillis complets.

Domaines numériques classiques :

- Intervalles ;
- Zones (Miné 2001)



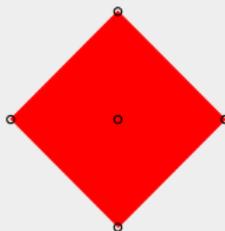
Domaines classiques en interprétation abstraite

Dans l'exemple : Invariants numériques générés=intervalles.

En général, domaines numériques abstraits sont des treillis complets.

Domaines numériques classiques :

- Intervalles ;
- Zones (Miné 2001)
- Polyèdres (Cousot & Halbwachs 78) (pas treillis complet et coût de calcul exponentiel) ;



Inconvénient des domaines polyédriques

Considérons un simple oscillateur harmonique $\ddot{x} + c\dot{x} + x = 0$.

FIG.: L'implémentation du schéma d'Euler associé à l'oscillateur harmonique

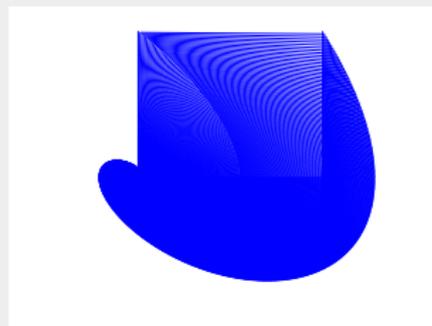
```
x = [0, 1];  
v = [0, 1];  
h = 0.01;  
c = 1;  
while (true) { [2]  
    ov = v;  
    v = v*(1-h*c)-h*x;  
    x = x+h*ov; [3] }
```

Inconvénient des domaines polyédriques

Considérons un simple oscillateur harmonique $\ddot{x} + c\dot{x} + x = 0$.

FIG.: L'implémentation du schéma d'Euler associé à l'oscillateur harmonique

```
x = [0, 1];
v = [0, 1];
h = 0.01;
c = 1;
while (true) { [2]
  ov = v;
  v = v*(1-h*c)-h*x;
  x = x+h*ov; [3] }
```



Trajectoires du système discret
(schéma d'Euler)

Inconvénient des domaines polyédriques

Considérons un simple oscillateur harmonique $\ddot{x} + c\dot{x} + x = 0$.

FIG.: L'implémentation du schéma d'Euler associé à l'oscillateur harmonique

```
x = [0, 1];
v = [0, 1];
h = 0.01;
c = 1;
while (true) { [2]
  ov = v;
  v = v*(1-h*c)-h*x;
  x = x+h*ov; [3] }
```

Analyse dans le domaine
des polyèdres :
 $x = \top, v = \top$
 $h = 0.01, c = 1$

Contenu : Optimisation, Jeux et interprétation abstraite

But de cette thèse :

- Raffiner IP pour obtenir le plus petit point fixe ;
- Construire un domaine permettant de calculer des invariants non-linéaires.

Contenu : Optimisation, Jeux et interprétation abstraite

But de cette thèse :

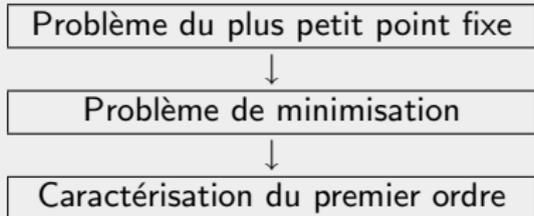
- Raffiner IP pour obtenir le plus petit point fixe ;
- Construire un domaine permettant de calculer des invariants non-linéaires.

- ① A la recherche du plus petit point fixe
- ② Gabarits quadratiques et invariants non linéaires
- ③ Conclusion & perspectives

Contenu

- 1 A la recherche du plus petit point fixe
 - Techniques de Perron-Frobenius non linéaires
 - Minimalité locale
 - Caractérisation du plus petit point : hypothèses restrictives
 - Raffinement de IP
- 2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires
- 3 Conclusion & perspectives

Point de vue optimisation



Les applications ne sont ni C^1 ni convexes \rightarrow une notion plus faible de différentielle : la **semidifférentielle**.

Caractérisation implémentable \rightarrow **rayon spectral non linéaire**.

La semidifférentielle

Definition (Semidifférentielle voir Rockafellar et Wets (98))

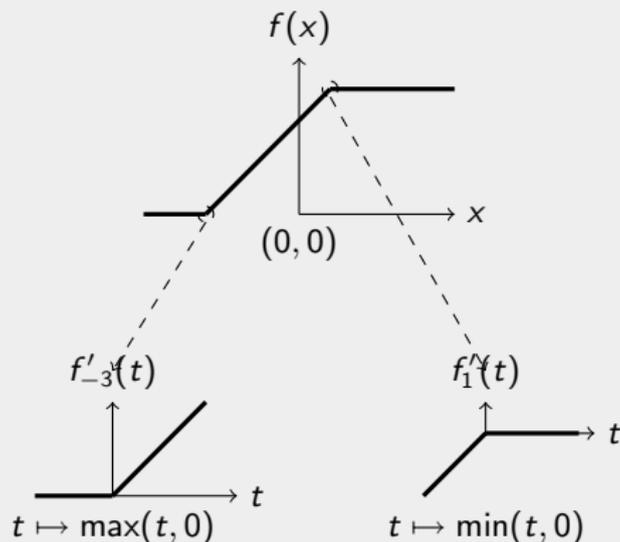
La semidifférentielle f'_u de f en u est la fonction **homogène continue** t.q :

$$f(u + h) = f(u) + f'_u(h) + o(\|h\|) .$$

Exemple de calcul semidifférentiel

$f(x) = \min(\max(x + 3, 0), 4)$,. Aux points $x = -3$ et $x = 1$, f pas dérivable.

$$f(-3 + t) = f(-3) + \max(t, 0) + 0 \text{ et } f(1 + t) = f(1) + \min(t, 0) + 0$$



Le rayon spectral

Definition (Rayon spectral)

Le rayon spectral $\rho_{\mathbf{C}}(g)$ d'une application homogène continue g sur un cône convexe pointé \mathbf{C} est le nombre positif :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \exists x \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, g(x) = \lambda x\}$$

Exemple rayon spectral

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \leq 2y, y \leq 2x\}$ et :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \min(2x, y) + x - (1/3)y \\ (2/3)(\min(y, (1/2)x) + y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + (2/3)y = \lambda x \\ (1/3)x + (2/3)y = \lambda y \end{cases}$$

D'où $\lambda = 4/3$ ou $\lambda = 1/3$ mais $\lambda = 1/3$ pas de solution dans C .

Finalement, $\rho_C(f) = 4/3$.

Contenu

① A la recherche du plus petit point fixe

Techniques de Perron-Frobenius non linéaires

Minimalité locale

Caractérisation du plus petit point : hypothèses restrictives

Raffinement de IP

② Gabarits quadratiques et invariants non linéaires

③ Conclusion & perspectives

Une caractérisation de minimalité locale

Un point fixe u est localement minimal s'il existe un voisinage qui ne contient pas de point fixe plus petit que u .

Théorème (Caractérisation d'un point fixe localement minimal)

Soit $u \in \mathbf{Fix}(f)$. Soit les assertions suivantes :

1. u est un point fixe localement minimal.
2. $\mathbf{Fix}_{\mathbb{R}^d}(f'_u) = \{0\}$.
3. $\rho_{\mathbb{R}^d}(f'_u) < 1$.

Alors $3 \implies 2 \implies 1$.

Idée de la preuve : $2 \implies 1$, $y_n := \|h_n\|^{-1}h_n$,

$$\|h_n\|^{-1}[f(u + \|h_n\|y_n) - f(u)] - f'_u(y_n) \rightarrow 0$$

$$\implies y_n - f'_u(y_n) \rightarrow 0 \implies y = f'_u(y), \|y\| = 1 \text{ et } y \text{ est négatif.}$$

f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(\min(x, y), 0) + 2 \max(\min(x + 1, 0), -2) \\ \max(\max(x, y), 0) + 2 \max(\min(y + 1, 0), -2) \end{pmatrix}$$

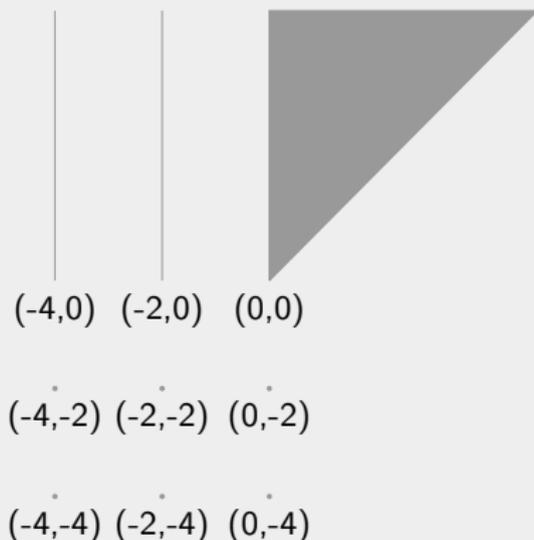


FIG.: Ensemble des points fixes de f

Autour de $u_3 = (0, 0)$, $f : (x, y) \mapsto (\max(\min(x, y), 0), \max(\max(x, y), 0))$, et $f'_{u_3} : (h_1, h_2) \mapsto (\max(\min(h_1, h_2), 0), \max(\max(h_1, h_2), 0))$.

Contenu

1 A la recherche du plus petit point fixe

Techniques de Perron-Frobenius non linéaires

Minimalité locale

Caractérisation du plus petit point : hypothèses restrictives

Raffinement de IP

2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires

3 Conclusion & perspectives

Contraction au sens large : local au (global) plus petit

f est (norme-sup) contractante au sens large si : $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty$,
 $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Théorème (Local est le plus petit)

Si f est une application monotone contractante au sens large alors u est localement minimal $\iff u$ est le plus petit point fixe.

Lemme (Retract de \mathbb{R}^d)

Il existe une application monotone et contractante au sens large P t.q
 $P(\mathbb{R}^d) = \mathbf{Fix}(f)$ et $\mathbf{Fix}(P) = \mathbf{Fix}(f)$.

Exemple caractérisation plus petit point fixe

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \min(\max(x, 0), \max(y, 0)) \\ \max(\max(x, 0), \max(y, 0)) \end{pmatrix}$$

FIG.: Ensemble des points fixes de f

(u, v) t.q. $v > 0$ et $u = 0$.

$$f'_{(u,v)} : h \mapsto (\max(h_1, 0), h_2), \quad f'_{(u,v)}(0, -1) = (0, -1) .$$

(u, v) pas le plus petit point fixe de f .

Or $f'_{(0,0)} : h \mapsto (\min(\max(h_1, 0), \max(h_2, 0)), \max(\max(h_1, 0), \max(h_2, 0)))$.

$$\text{Sur } \mathbb{R}_-^2, f'_{(0,0)} \equiv 0 .$$

donc $(0, 0)$ est le plus petit point fixe de f .

Applications affines par morceaux

see C.D. Aliprantis and R. Tourby (07)

$f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est affine par morceaux ssi

$$f_i = \min_{a \in A_i} \max_{b \in B_a} g_{a,b}$$

où $g_{a,b}$ est affine, A_i et B_a sont des ensembles finis.

Proposition (Semidifférentielle d'une application affine par morceaux)

Une application affine par morceaux f est semidifférentiable pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et :

- Soit $\bar{A}_j = \{a \in A_j \mid f_j(u) = \max_{b \in B_a} g_{a,b}(u)\}$ et $\bar{B}_a = \{\bar{b} \in B_a \mid g_{a,\bar{b}}(u) = \max_{b \in B_a} g_{a,b}(u)\}$, alors

$$(f'_u)_j = \min_{a \in \bar{A}_j} \max_{b \in \bar{B}_a} \nabla g_{a,b}$$

- Pour h petit, $f(u+h) = f(u) + f'_u(h)$.

...Donc si f est affine par morceaux alors u est localement minimal ssi

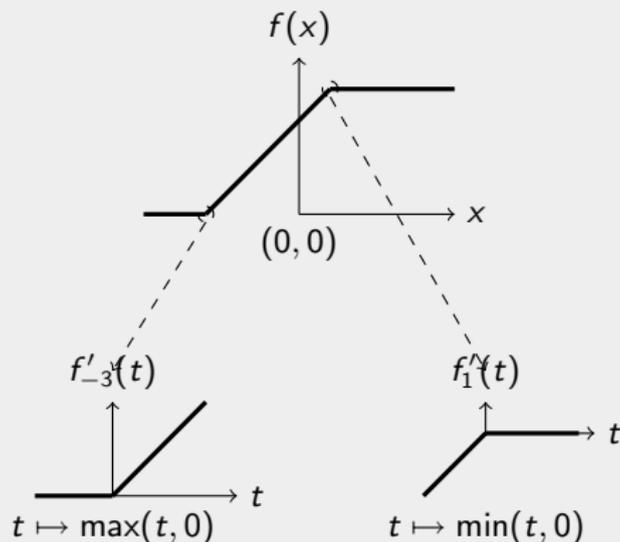
$$\text{Fix}_{|\mathbb{R}^d} (f'_u) = \{0\}.$$



Exemple de calcul semidifférentiel affine par morceaux

$f(x) = \min(\max(x + 3, 0), 4)$,. Aux points $x = -3$ et $x = 1$, f pas dérivable.

$$f(-3 + t) = f(-3) + \max(t, 0) + 0 \text{ et } f(1 + t) = f(1) + \min(t, 0) + 0$$



Caractérisation du plus petit point fixe

Théorème (Caractérisation du plus petit point fixe)

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une application monotone affine par morceaux et contractante au sens large. Les assertions sont équivalentes :

1. u est le plus petit point fixe de f .
2. $\mathbf{Fix}_{|\mathbb{R}^d} (f'_u) = \{0\}$.
3. $\rho_{\mathbb{R}^d} (f'_u) < 1$.

Contenu

1 A la recherche du plus petit point fixe

Techniques de Perron-Frobenius non linéaires

Minimalité locale

Caractérisation du plus petit point : hypothèses restrictives

Raffinement de IP

2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires

3 Conclusion & perspectives

Calcul du plus petit point fixe par IP

$$f_i = \min_{a \in A(i)} \max_{b \in B(i,a)} r_i^{a,b} + M_i^{a,b} \quad (\square)$$

où $A(i)$ et $B(i, a)$ sont finis et $M_i^{a,b}$ sont des vecteurs sous-stochastiques (coordonnées positives et somme des coordonnées ≤ 1).

- Calculer un point fixe u_k de f par itération sur les politiques.
- *Amélioration de la politique* (\mathbf{I}_k^2) : Calculer $\alpha_k := \rho_{\mathbb{R}_-^d}(f'_{u^k})$.

- Si $\alpha_k < 1$, retourner u^k .
- Si $\alpha_k = 1$, choisir $h \in \mathbb{R}_-^d \setminus \{0\}$ t.q $f'_{u^k}(h) = h$.

Choisir $\pi^{k+1}(j)$ qui atteint le min dans $(f'_{u^k})_j(h) = \min_{a \in \bar{A}(j)} (f'_a)_{u^k}(h)$ où $\bar{A}(j) = \{a \mid f_a(u^k) = f(u^k)\}$.

Initialiser une nouvelle itération sur les politiques avec $f^{\pi^{k+1}}$.

Cet algorithme s'arrête.



Méthodes des puissances

Autres définitions de rayon spectral :

Rayon spectral de Bonsall :

$$\tilde{\rho}_C(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in C}} \|g^n(x)\|$$

Rayon spectral relatif à un cône :

$$\hat{\rho}_C(g) = \sup_{x \in C} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|g^k(x)\|^{1/k}$$

et Nussbaum (86) :

$$\rho_C(g) = \inf_{x \in \text{int}} \max_{1 \leq i \leq d} \frac{g_i(x)}{x_i}$$

Mallet-Parret et Nussbaum (02) $C = \mathbb{R}_-^d$:

$$\rho_C(g) = \tilde{\rho}_C(g) = \hat{\rho}_C(g) .$$

Dans le raffinement

$\rho_{\mathbb{R}_-^d}(f'_u) < 1$ peut être vérifié par un algorithme de type puissance...

Algorithme des puissances ne terminant pas si $\rho_{\mathbb{R}_-^d}(f'_u) = 1$.

Fonction min-max homogènes

Pour calculer le rayon spectral...une extension des fonctions min-max (Olsder (91), Gunawardena (94)) :

Une fonction min-max homogène de variables h_1, \dots, h_d est un terme :

$$X \mapsto \min(X, X), \max(X, X), h_1, \dots, h_d, 0.$$

$$\text{E.g. } f(h_1, h_2, h_3) = \min(\max(0, h_2), h_3).$$

Proposition (Rayon spectral d'une application min-max homogène)

Soit g une application min-max homogène sur \mathbb{R}^d , $e \equiv -1$, alors

- $\rho_{\mathbb{R}^d}(g) \in \{0, 1\}$.
- $\rho_{\mathbb{R}^d}(g) = 0 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} g^k(e) = 0$.
- Cette dernière limite est atteinte en au plus d pas.

Retour à l'exemple 2

$$f \begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, (x_2^+ - 1)) \\ \min(99, \max(0, (x_2^- + 1))) \end{pmatrix}.$$

Nous avons trouvé $(98, 99)$, la semidifférentielle en $(98, 99)$:

$$f'_{(98,99)}(h_1, h_2) = (h_2, \min(0, h_1)).$$

$$\rho_{\mathbb{R}_-^2}(f'_{(98,99)}) = 1 \text{ et } f'_{(98,99)}(e) = e.$$

Ce point fixe conduit à une nouvelle politique :

$$f^{\pi^1}(x_2^-, x_2^+) := (\max(0, (x_2^+ - 1)), \max(0, (x_2^- + 1))) .$$

$$\text{IP retourne } (0, 1) : f'_{(0,1)}(h_1, h_2) = (\max(0, h_2), h_1).$$

$$\rho_{\mathbb{R}_-^2}(f'_{(0,1)}) = 0 \text{ donc } (0, 1) \text{ est le plus petit point fixe de } F.$$

Contenu

- 1 A la recherche du plus petit point fixe
- 2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires
 - Généralisation des gabarits linéaires
 - Concrétisation et abstraction
 - Invariants quadratiques et Shor
 - Calcul d'invariants quadratiques
- 3 Conclusion & perspectives



Gabarits linéaires

Domaine des polyèdres :

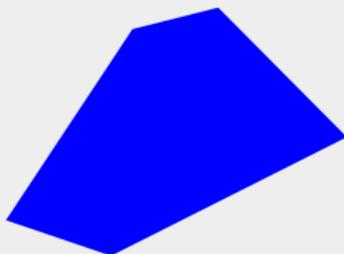
Problème : Nombre des points extrêmes et des faces explosent au cours de l'exécution !

Approches : Manna, Sankaranarayanan, and Sipma (VMCAI05).

Polyèdres avec des faces prescrites donc pas d'explosion.

L'utilisateur fournit les gabarits linéaires :

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2}x - y, \quad p_2(x, y) = y - \frac{3}{2}x, \quad p_3(x, y) = y - \frac{1}{4}x, \\ p_4(x, y) = y + x \text{ et } p_5(x, y) = -y - \frac{1}{3}x$$



$$\left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} p_1(x, y) \leq 1 \\ p_2(x, y) \leq 5 \\ p_3(x, y) \leq \frac{5}{2} \\ p_4(x, y) \leq 2 \\ p_5(x, y) \leq 3 \end{array} \right\}$$

FIG.: A gauche, la concrétisation géométrique de l'ensemble abstrait de droite



Gabarits linéaires

Domaine des polyèdres :

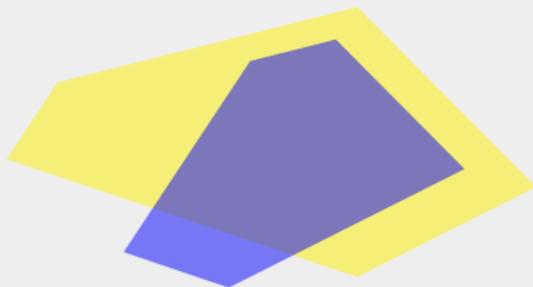
Problème : Nombre des points extrêmes et des faces explosent au cours de l'exécution !

Approches : Manna, Sankaranarayanan, and Sipma (VMCAI05).

Polyèdres avec des faces prescrites donc pas d'explosion.

L'utilisateur fournit les gabarits linéaires :

$$p_1(x, y) = \frac{1}{2}x - y, \quad p_2(x, y) = y - \frac{3}{2}x, \quad p_3(x, y) = y - \frac{1}{4}x, \\ p_4(x, y) = y + x \text{ et } p_5(x, y) = -y - \frac{1}{3}x$$



$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(x, y) \leq 2 \\ p_2(x, y) \leq 10 \\ (x, y) \mid p_3(x, y) \leq 3 \\ p_4(x, y) \leq 3 \\ p_5(x, y) \leq 2 \end{array} \right\}$$

FIG.: A gauche, la concrétisation géométrique de l'ensemble abstrait de droite

Gabarits non linéaires

Prenons $p_1(x, v) = x^2$, $p_2(x, v) = v^2$ et $p_3(x, v) = 2x^2 + 3v^2 + 2xv$.



$$\left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} p_1(x, y) \leq 3.5 \\ p_2(x, y) \leq 2.333 \\ p_3(x, y) \leq 7 \end{array} \right\}$$

FIG.: A gauche, la concrétisation géométrique de l'ensemble abstrait de droite

Gabarits non linéaires

Prenons $p_1(x, v) = x^2$, $p_2(x, v) = v^2$ et $p_3(x, v) = 2x^2 + 3v^2 + 2xv$.



$$\left\{ (x, y) \mid \begin{array}{l} p_1(x, y) \leq 3.5 \\ p_2(x, y) \leq 2.333 \\ p_3(x, y) \leq 7 \end{array} \right\}$$

FIG.: A gauche, la concrétisation géométrique de l'ensemble abstrait de droite

Une fonction de Lyapunov du système discret induit par le schéma d'Euler pour l'oscillateur harmonique.

Contenu

- 1 A la recherche du plus petit point fixe
- 2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires
 - Généralisation des gabarits linéaires
 - Concrétisation et abstraction**
 - Invariants quadratiques et Shor
 - Calcul d'invariants quadratiques
- 3 Conclusion & perspectives

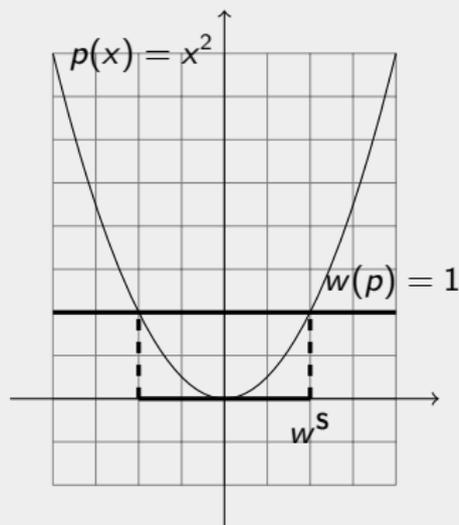


\mathbb{P} -sous niveaux (Fonction de concrétisation)

\mathbb{P} un ensemble de fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , et $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$ les fonctions de \mathbb{P} dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$, nous définissons le \mathbb{P} -sous niveau :

$$w^{\mathbb{S}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) \leq w(p), \forall p \in \mathbb{P}\}$$



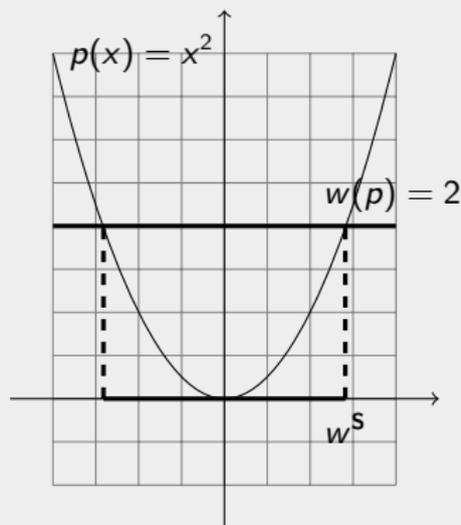


\mathbb{P} -sous niveaux (Fonction de concrétisation)

\mathbb{P} un ensemble de fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , et $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$ les fonctions de \mathbb{P} dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$, nous définissons le \mathbb{P} -sous niveau :

$$w^{\mathbb{S}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) \leq w(p), \forall p \in \mathbb{P}\}$$



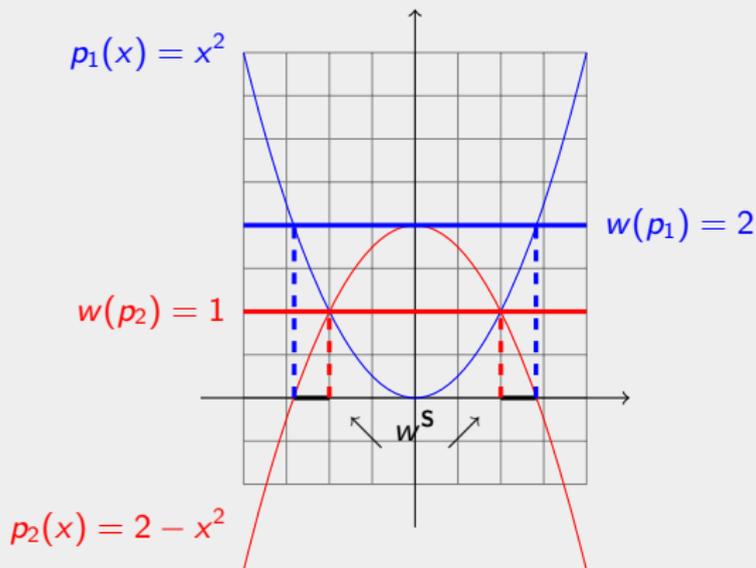


\mathbb{P} -sous niveaux (Fonction de concrétisation)

\mathbb{P} un ensemble de fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , et $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$ les fonctions de \mathbb{P} dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$, nous définissons le \mathbb{P} -sous niveau :

$$w^S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) \leq w(p), \forall p \in \mathbb{P}\}$$





\mathbb{P} -sous niveaux (Fonction de concrétisation)

\mathbb{P} un ensemble de fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , et $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$ les fonctions de \mathbb{P} dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour $w \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{P}}$, nous définissons le \mathbb{P} -sous niveau :

$$w^{\mathbb{S}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) \leq w(p), \forall p \in \mathbb{P}\}$$

Exemple

$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ où $p_1(x, v) = x^2$, $p_2(x, v) = v^2$ et $p_3(x, v) = 2x^2 + 3v^2 + 2xv$.

$w(p_1) = 3.5$, $w(p_2) = 2.3333$ et $w(p_3) = 7$.

$w^{\mathbb{S}} =$





\mathbb{P} -fonction support (Fonction d'abstraction)

Pour $C \subseteq \mathbb{R}^d$, nous définissons la fonction d'abstraction :

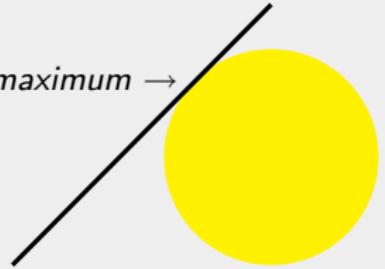
$$\begin{aligned} C^\sigma : \mathbb{P} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ p &\mapsto \sup\{p(x) \mid x \in C\} \end{aligned}$$

Exemple

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et}$$

$$\mathbb{P} = \{p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y, p_3(x, y) = y - x\}.$$

$(x, y) \in C$ maximum \rightarrow

$$y - x = \sqrt{2}$$




\mathbb{P} -fonction support (Fonction d'abstraction)

Pour $C \subseteq \mathbb{R}^d$, nous définissons la fonction d'abstraction :

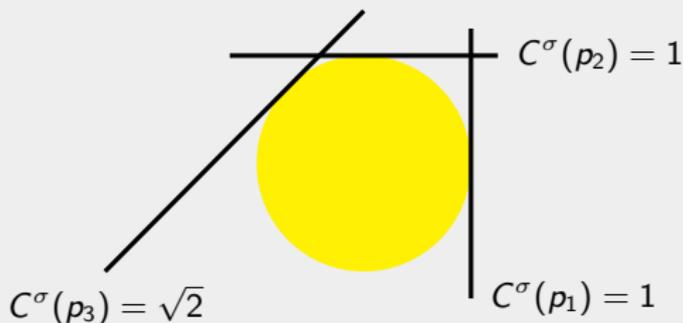
$$C^\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$p \mapsto \sup\{p(x) \mid x \in C\}$$

Exemple

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et}$$

$$\mathbb{P} = \{p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y, p_3(x, y) = y - x\}.$$



Une correspondance de Galois

Nous rappelons que $w \in \overline{\mathbb{R}^{\mathbb{P}}}$,

$$w^{\mathbb{S}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) \leq w(p), \forall p \in \mathbb{P}\}$$

et pour $C \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$C^\sigma : \begin{array}{l} \mathbb{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ p \mapsto \sup\{p(x) \mid x \in C\} \end{array}$$

Nous concluons que :

Proposition

$(\cdot^\sigma, \cdot^{\mathbb{S}})$ définit une correspondance de Galois entre $\overline{\mathbb{R}^{\mathbb{P}}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Contenu

- 1 A la recherche du plus petit point fixe
- 2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires
 - Généralisation des gabarits linéaires
 - Concrétisation et abstraction
 - Invariants quadratiques et Shor**
 - Calcul d'invariants quadratiques
- 3 Conclusion & perspectives

Gabarits quadratiques

\mathbb{P} est un ensemble fini de fonctions :

Gabarits quadratiques

$$p \mapsto x^T A_p x + x^T b_p$$

où A_p sont $d \times d$ matrices symétriques, b_p sont des vecteurs de \mathbb{R}^d .

Par exemple :

$\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ avec $p_1(x, v) = x^2$, $p_2(x, v) = v^2$ et $p_3(x, v) = 2x^2 + 3v^2 + 2xv$ sont des gabarits quadratiques.

Calculer les bornes par interprétation abstraite

En interprétation abstraite, on résout : $F^\sharp(w) = F(w^S)^\sigma = w$.

Donc,

$$[F^\sharp(w)](p) = \sup\{p(y) \mid y = F(x), x \in w^S\}$$

Pour une affectation linéaire $y := Mx$, supposons $q(x) \leq w(q)$, $\forall q \in \mathbb{P}$. Avec les gabarits quadratiques nous avons :

$$[F^\sharp(w)](p) = \begin{array}{ll} \sup & x^T M^T A_p M x + x^T M^T b_p \\ \text{s. t} & x^T A_q x + x^T b_q \leq w(q) \\ & \forall q \in \mathbb{P} \end{array}$$

Peut être résolu en temps polynomial quand chaque gabarit p sont à la fois convexes et concaves c-à-d linéaires.

Calculer les bornes par interprétation abstraite

En interprétation abstraite, on résout : $F^\sharp(w) = F(w^S)^\sigma = w$.

Donc,

$$[F^\sharp(w)](p) = \sup\{p(y) \mid y = F(x), x \in w^S\}$$

Pour une affectation linéaire $y := Mx$, supposons $q(x) \leq w(q)$, $\forall q \in \mathbb{P}$. Avec les gabarits quadratiques nous avons :

$$\begin{aligned} [F^\sharp(w)](p) = & \sup & x^T M^T A_p M x + x^T M^T b_p \\ & \text{s. t} & x^T A_q x + x^T b_q \leq w(q) \\ & & \forall q \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

En général, le problème est **NP-dur** (Vavasis 90) !

Calculer les bornes par interprétation abstraite

En interprétation abstraite, on résout : $F^\sharp(w) = F(w^S)^\sigma = w$.

Donc,

$$[F^\sharp(w)](p) = \sup\{p(y) \mid y = F(x), x \in w^S\}$$

Pour une affectation linéaire $y := Mx$, supposons $q(x) \leq w(q)$, $\forall q \in \mathbb{P}$. Avec les gabarits quadratiques nous avons :

$$\begin{aligned} [F^\sharp(w)](p) = & \sup & x^T M^T A_p M x + x^T M^T b_p \\ & \text{s. t} & x^T A_q x + x^T b_q \leq w(q) \\ & & \forall q \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

Cependant nous proposons de calculer une sur-approximation grâce à la [relaxation de Shor](#).

Concept de dualité lagrangienne (1)

g, g_1, \dots, g_n sont des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

Un problème d'optimisation sous-contraintes :

$$\begin{array}{ll} \sup & g(x) \\ \text{s.t} & g_1(x) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_n(x) \leq 0 \end{array}$$

On écrit : $L(\lambda, x) = g(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)$ et on remarque :

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^n} L(\lambda, x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } \forall i \ g_i(x) \leq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coordonnées de $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ sont appelées **multiplicateurs de Lagrange**.

Concepts de la dualité lagrangienne (2)

g concave, g_1, \dots, g_n convexes et s'il existe x t.q. $g_i(x) < 0$ (théorème de dualité forte) :

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} L(x, \lambda) = \sup\{g(x) \mid g_i(x) \leq 0 \forall i\}$$

Pour les gabarits quadratiques, pour appliquer ce théorème, p doit être linéaire !

Cependant :

En général, nous avons juste une sur-approximation (Théorème de dualité faible) :

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(g(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \right) \geq \sup\{g(x) \mid g_i(x) \leq 0 \forall i\}$$

Dans notre cas : $F^R = \inf F^\lambda$ avec $F^\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(g(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \right)$.

Relaxation de Shor

Pour les gabarits quadratiques : $[F^{\mathcal{R}}(w)](p)$ peut être réécrit comme (Shor87) :

Minimiser	une fonction linéaire
sous	- une combinaison linéaire de matrices est S^-
contraintes	- les coefficients sont des multiplicateurs de Lagrange

(S^- = Matrices semi-définie négative c-à-d. toutes les valeurs propres sont négatives ou nulles.)

Relaxation de Shor

Pour les gabarits quadratiques : $[F^{\mathcal{R}}(w)](p)$ peut être réécrit comme (Shor87) :

Minimiser η

sous $N(p \circ M) + \eta R(-1) + \sum_{q \in \mathbb{P}} \lambda(q)[R(w(q)) - N(q)]$ est S^-

contraintes $\lambda(q) \geq 0, \forall q \in P$
 $\eta \in \mathbb{R}$

Où $N(p) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}b_p^T \\ \frac{1}{2}b_p & A_p \end{pmatrix}$, et pour $y \in \mathbb{R}$, $R_{1,1}(y) = y$ et 0 sinon.

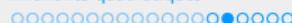
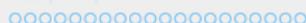
Contenu

- 1 A la recherche du plus petit point fixe
- 2 Gabarits quadratiques et invariants non linéaires
 - Généralisation des gabarits linéaires
 - Concrétisation et abstraction
 - Invariants quadratiques et Shor
 - Calcul d'invariants quadratiques
- 3 Conclusion & perspectives

Calcul de point fixe

Notre sémantique, pour :

- Affectation linéaire et intersection (tests) : on calcule une sur-approximation de la fonction sémantique abstraite par la relaxation de Shor.
- Union : interprétée comme un sup (pas de relaxation).



Calcul de point fixe

Notre sémantique, pour :

- Affectation linéaire et intersection (tests) : on calcule une sur-approximation de la fonction sémantique abstraite par la relaxation de Shor.
- Union : interprétée comme un sup (pas de relaxation).

On rappelle :

$\underline{x}(x, v) = x^2$, $\underline{v}(x, v) = v^2$, $\underline{E}(x, v) = 2x^2 + 3v^2 + 2xv$ et $\mathbb{P} = \{\underline{x}, \underline{v}, \underline{E}\}$.

Pour l'oscillateur harmonique, l'équation sémantique abstraite donnée par la correspondance de Galois :

$$\begin{aligned}
 [F_1^\sharp(w)](p) &= \{\underline{x}(x, v) \leq 1, \underline{v}(x, v) \leq 1, \underline{E}(x, v) \leq 7\}^\sigma \\
 [F_2^\sharp(w)](p) &= \sup\{w_1(p), w_3(p)\} \\
 [F_3^\sharp(w)](p) &= \sup_{(x,v) \in (w_2)^*} p(M(x, v))
 \end{aligned}$$

avec $\begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 - hc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.01 \\ -0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$



Calcul de point fixe

Notre sémantique, pour :

- Affectation linéaire et intersection (tests) : on calcule une sur-approximation de la fonction sémantique abstraite par la relaxation de Shor.
- Union : interprétée comme un sup (pas de relaxation).

On rappelle :

$\underline{x}(x, v) = x^2$, $\underline{v}(x, v) = v^2$, $\underline{E}(x, v) = 2x^2 + 3v^2 + 2xv$ et $\mathbb{P} = \{\underline{x}, \underline{v}, \underline{E}\}$.

L'équation sémantique relâchée :

$$\begin{aligned}
 [F_1^{\mathcal{R}}(w)](p) &= \{ \underline{x}(x, v) \leq 1, \underline{v}(x, v) \leq 1, \underline{E}(x, v) \leq 7 \}^\sigma \\
 [F_2^{\mathcal{R}}(w)](p) &= \sup \{ w_1(p), w_3(p) \} \\
 [F_3^{\mathcal{R}}(w)](p) &= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{P}}} \sup_{(x, v)} \sum_{q \in \mathbb{P}} \lambda(q) (w_2(q) - q(x))
 \end{aligned}$$

Pour calculer le plus petit point fixe de $F^{\mathcal{R}}$, on peut utiliser l'itération de Kleene classique. Avec accélération, l'itération de Kleene donne : $\{x^2 \leq 6, v^2 \leq 4, 2x^2 + 3v^2 + 2xv \leq 10\}$.

Itération sur les politiques

On peut aussi utiliser l'itération sur les politiques qui fournit à chaque pas une sur-approximation du point fixe.

Nous remarquons que :

$$[F_3^{\mathcal{R}}(w)](p) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{P}}} [F_3^{\lambda}(w)](p) \text{ avec}$$

$$[F_3^{\lambda}(w)](p) = \sup_{(x,v)} \sum_{q \in \mathbb{P}} \lambda(q)(w_2(q) - q(x))$$

Les vecteurs de multiplicateurs λ sont appelés **politiques**.



Itération sur les politiques

On peut aussi utiliser l'itération sur les politiques qui fournit à chaque pas une sur-approximation du point fixe.

Nous remarquons que :

$$[F_3^{\mathcal{R}}(w)](p) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{P}}} [F_3^{\lambda}(w)](p) \text{ avec}$$

$$[F_3^{\lambda}(w)](p) = \sup_{(x,v)} \sum_{q \in \mathbb{P}} \lambda(q)(w_2(q) - q(x))$$

Les vecteurs de multiplicateurs λ sont appelés **politiques**.

- Premièrement, IP consiste à fixer un minimum c-à-d. nous fixons une politique λ .
Par exemple, $p = \underline{E}$, nous pouvons choisir $\lambda(\underline{x}) = \lambda(\underline{v}) = 0$ et $\lambda(\underline{E}) = 1$.
Nous obtenons $[F_3^{\lambda}(w)](p) = w_2(\underline{E}) + \sup_{(x,v)} p(M(x, v)) - \underline{E}(x, v)$.
- Puis, nous calculons le plus petit point fixe de F^{λ} en résolvant un programme linéaire.
- Finalement, on teste si le plus petit point fixe de F^{λ} est aussi un point fixe de $F^{\mathcal{R}}$.



Etape 1

Pour tout p , nous prenons $\lambda(\underline{x}) = \lambda(\underline{v}) = 0$ et $\lambda(\underline{E}) = 1$ comme politique initiale.

On calcule le plus petit point fixe de cette "politique" :

$$\begin{aligned} [F_1^\lambda(w)](p) &= \{\underline{x}(x, v) \leq 1, \underline{v}(x, v) \leq 1, \underline{E}(x, v) \leq 7\}^\sigma \\ [F_2^\lambda(w)](p) &= \sup\{w_1(p), w_3(p)\} \\ [F_3^\lambda(w)](p) &= w_2(\underline{E}) + \sup_{(x,v)} p(Mx) - \underline{E}(x, v) \end{aligned}$$

Etape 2

Nous résolvons le programme linéaire :

$$\text{Minimiser } \sum_{i=1}^3 \sum_{p \in \mathbb{P}} w_i(p)$$

$$[F_1^\lambda(w)] \leq w_1$$

$$[F_2^\lambda(w)] \leq w_2$$

$$[F_3^\lambda(w)] \leq w_3$$

Par exemple, après une opération de clôture, à la troisième composante :

$$\begin{aligned}w_3^0(\underline{x}) &= 4.2 \\w_3^0(\underline{v}) &= 2.8 \\w_3^0(\underline{E}) &= 7.0000\end{aligned}$$

Etape 3

Nous évaluons $F^{\mathcal{R}}(w)$ grâce à la relaxation de Shor.

Nous trouvons $F^{\mathcal{R}}(w) \neq w$ mais la relaxation de Shor fournit

le vecteur de multiplicateurs de Lagrange optimal = nouvelle politique.

A chaque $p \in \mathbb{P}$, la politique $\pi_3^1(p)$ est un vecteur de multiplicateurs de Lagrange : $(\lambda(\underline{x}), \lambda(\underline{v}), \lambda(\underline{E}))$.

Par exemple : $\pi_3^1(\underline{x}) = (0, 0, 0.596)$

Retourner à l'étape 2.

Finalement, après 5 itérations, l'invariant de boucle c-à-d. $w_2^{\mathbb{S}}$ au point de contrôle 2 est :

$$\{x^2 \leq 3.5, v^2 \leq 2.333, 2x^2 + 3v^2 + 2xv \leq 7\}.$$



Conclusion & perspectives sur le problème du plus petit point fixe

Conclusion

- Méthode calculatoire pour calculer le plus petit fixe d'une application monotone affine par morceaux et contractante.
- Prototype en C.
- Méthode rapide.

Perspectives

- Problèmes des gros "sauts" (l'application n'est plus contractante) ;
- Amélioration du calcul du rayon spectral et du point fixe négatif ;
- Jeux stochastiques à paiements positifs.

Conclusion & perspectives sur les domaines des sous-niveaux

Conclusion

- Nouveau domaine pour l'interprétation abstraite.
- Generalisation du travail de Sankaranarayanan et al : Pour trouver des bornes plus précises, nous utilisons des gabarits non-linéaires.
- Itération sur les politiques.

Perspectives

- Adapter la méthode sur un modèle avec nombres flottants ;
- Considérer des programmes écrits en arithmétique polynomiale et utiliser les sommes de carrés ou la programmation géométrique ;
- Gabarits infinis, approche par la programmation semi-infinie.