Méthode d'itération sur les politiques et minimalité d'invariant en analyse statique de programme par interprétation abstraite

Assalé ADJE
Sous la direction de:
Stéphane Gaubert, Eric Goubault et Sarah Zennou

23 mai 2008

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

De nos jours, l'automatisation de systèmes, en industrie, dans le secteur tertiaire, prend de plus en plus d'importance. Les programmes rendant cette automatisation possible doivent être sûrs et stables, il faut donc les tester, savoir s'ils exécutent sans générer d'erreurs, de dépassements de mémoire ou tout autre problème conduisant à l'arrêt du programme. Cependant, la combinatoire des programmes analysés empêche le test d'être exhaustif. Comment peut-on tester, vérifier un programme sans l'exécuter et trouver des valeurs pour lesquelles le programme est sûr de s'exécuter sans problèmes ?

C'est le but de l'analyse statique de programmes par interprétation abstraite [CC77], [CC92], cette méthode permet, entre autres, de déterminer une surapproximation des valeurs possibles prises par les variables du programme à analyser pour chaque ligne d'exécution. On obtient ainsi ce qu'on appelle un invariant du programme. La méthode classique de calcul est l'itération de Kleene. Ici, on expose une nouvelle technique permettant de calculer cet invariant, il sera obtenu en calculant le point fixe d'une fonctionnelle déduite des équations sémantiques du programme.

La théorie des jeux où les problèmes de point fixe sont récurrents (calcul de la valeur d'un jeu, recherche d'équilibres, inclusions différentielles...) peut apporter une solution à ce problème de point fixe. L'algorithme appelé, algorithme d'itérations sur les politiques, utilisé ici, est un algorithme calculant un point fixe d'une application f croissante de type min-max, ce type d'applications apparaît souvent dans les jeux à deux joueurs à somme nulle.

L'algorithme calcule un point fixe de f à partir de plus petit point fixe d'applications plus simples appelées politiques. Toutefois, le point fixe de f trouvé peut ne pas être le plus petit. Même si le problème de l'invariant minimal est indécidable, la minimalité du point fixe de la fonctionnelle déduite des équations sémantiques du programme garantira une surapproximation moins large. La surapproximation obtenue contiendra moins de valeurs qui ne pourraient pas être atteintes par les variables du programme.

De plus, on sait que, lorsque le nombre de politiques est fini, l'algorithme s'arrête et retourne un point fixe. Cependant, le nombre d'itérations peut dépendre, bien sûr, du nombre de politiques et de la politique initialement choisie. Par conséquent, il est intéressant d'étudier le nombre d'itérations en fonction de la politique initiale et du nombre de politiques.

Dans une première partie, nous rappellerons rapidement ce qu'est l'analyse statique de programme par interprétation abstraite en évoquant la méthode classique utilisée appelée itération de Kleene et nous exposerons aussi la méthode d'itération sur les politiques.

Dans une seconde partie, nous appliquerons l'algorithme au problème d'interprétation abstraite pour des programmes simples en exposant la relation entre le nombre d'itérations et le politique initiale.

Enfin, dans une troisième partie, nous donnerons les résultats obtenus sur la minimalité de points fixes finis avec les rayons spectraux d'applications homogènes continues et la semidifférentielle.

Chapitre 2

Préliminaires

Dans cette partie, on va rappeler quelques notions de base sur l'analyse statique de programmes par interprétation abstraite, en exposant la méthode classique en interprétation abstraite appelée *itération de Kleene*, puis on décrira la méthode utilisée l'*itération sur les politiques.*

Définition 2.0.1. *Pour* $(\boldsymbol{X}, \prec)$ *un ensemble ordonné, on dira que cet ensemble est un treillis si pour toute paire d'éléments* x, y *appartenant à* $\boldsymbol{X}$*, il existe une borne supérieure notée* $x \sqcup y$ *et une borne inférieure* $x \sqcap y$ *pour l'ensemble* $\{x, y\}$*.*

Si, de plus, pour tout sous ensemble A *de* $\boldsymbol{X}$*,* A *possède une borne supérieure et une borne inférieure, on dit que* $(\boldsymbol{X}, \prec)$ *est un treillis complet.*

On notera $\perp_X$ le plus petit élément d'un treillis complet $(\mathbf{X}, \prec)$ et $\top_X$ son plus grand élément. On notera $\sqcup_X$ l'opération sup et $\sqcap_X$, l'opération inf.

Définition 2.0.2. *Soit* $(\boldsymbol{X}, \prec)$ *un treillis. On dit qu'une application* g *sur* $\boldsymbol{X}$ *est croissante si pour tout* $x, y \in \boldsymbol{X}$*,* $x \prec y \implies g(x) \prec g(y)$*.*

Définition 2.0.3. *Soit* $(\boldsymbol{X}, \prec)$ *un treillis. Soit* g *une application sur* $\boldsymbol{X}$*. On dit que* $x \in \boldsymbol{X}$ *est un point fixe de* g *si* $g(x) = x$*.*

Cette structure de treillis est fondamentale, elle permet d'avoir une relation d'ordre et, de plus, donner un sens au mot minimalité. La croissance des applications est elle aussi primordiale, le théorème de Knaster-Tarski nous garantit l'existence de points fixe pour cette classe d'applications dans un treillis complet.

2.1 Analyse statique de programmes par interprétation abstraite

L'analyse statique de programmes consiste à extraire une propriété du programme sans l'éxécuter. La propriété extraite doit être vraie quelque soient les valeurs d'entrée du programme. On appelle ces propriétés *invariants* du programme. En général, les invariants ne sont pas calculables, on doit, par conséquent, les approximer. Ici, on utilise l'interprétation abstraite, dûe à P.Cousot et R.Cousot [CC77] et [CC92], comme technique d'approximation. Dans l'interprétation abstraite, on se donne deux domaines :

- Le domaine concret qui représente l'ensembles des valeurs que peuvent prendre les variables du programme
- Le domaine abstrait qui représente un sur-ensemble calculable de l'ensemble des valeurs possibles des variables du programme.

Puis, on traduit le programme en *équations sémantiques* sur le domaine abstrait. Un invariant sera donné par un point fixe de la fonctionnelle induite par les équations sémantiques.

Soient $(\mathcal{L}_c, \sqsubseteq_c)$ un treillis complet représentant le domaine concret et $(\mathcal{L}_a, \sqsubseteq_a)$ un treillis complet représentant le domaine abstrait. Soit une paire d'applications (α, γ) telles que : $\alpha : \mathcal{L}_c \rightarrow \mathcal{L}_a$ et $\gamma : \mathcal{L}_a \rightarrow \mathcal{L}_c$. L'application α est appelée fonction d'abstraction, l'application γ fonction de concrétisation. Si (α, γ) sont toutes les deux croissantes et de plus, $\alpha(v_c) \sqsubseteq_a v_a$ ssi $v_c \sqsubseteq_c \gamma(v_a)$ alors la meilleure sur-approximation d'une propriété concrète, dans le domaine abstrait, est donnée par α.

Dans toute cette étude, on se placera dans le domaine abstrait des intervalles pour lequel nous faisons les rappels suivants :

Soient deux intervalles de $\bar{\mathbb{Z}}$, $I = [a; b]$ et $J = [c; d]$. On définit les opérations $+$ et $\times$ par : $[a; b] + [c; d] = [a + c; b + d]$ et $[a; b] \times [c; d] = [e, f]$ où $e = \min\{a * c, a * d, b * c, b * d\}$ et $f = \max\{a * c, a * d, b * c, b * d\}$. L'union $\cup$ sera définie par $I \cup J = [\inf\{a, c\}, \sup\{b, d\}]$ (l'enveloppe convexe de l'union ensembliste). Enfin l'intersection $I \cap J$ sera l'un des quatres intervalles :

$$ll(I, J) = [a, b],\ rr(I, J) = [c, d],\ lr(I, J) = [a, d],\ rl(I, J) = [c, b] \tag{2.1}$$

le l pour *left* et r pour *right*.

```
0    i = 150;
1    j = 175;
2    while (j >= 100){
3      i++;
4      if (j<= i){
5          i = i - 1;
6          j = j - 2;
7      }
8   }
9
```

$$\begin{aligned}
M_0 &= \mathit{context_initialization} \\
M_2 &= ((i \leftarrow 150,\ \ j \leftarrow 175)(M_0)) \\
M_3 &= ((M_2 \sqcup M_8) \sqcap (j \geq 100)) \\
M_4 &= ((i \leftarrow i + 1)(M_3)) \\
M_5 &= (M_4 \sqcap (j \leq i)) \\
\\
M_7 &= ((i \leftarrow i - 1,\ \ j \leftarrow j - 2)(M_5)) \\
M_8 &= ((M_4 \sqcap (j > i)) \sqcup M_7 \\
M_9 &= ((M_2 \sqcup M_8) \sqcap (j < 100))
\end{aligned}$$

FIG. 2.1 – Un programme (à gauche) et sa représentation par des équations

La figure 2.1 décrit un programme C (à gauche) avec les équations sémantiques dans le domaine des intervalles (à droite). Les chiffres dans la colonne de gauche correspondent aux points de contrôle, à chaque point de contrôle correspond une instruction. M_i est la variable qui contiendra l'invariant du *ième* point de contrôle. Dans les équations sémantiques, on trouve des unions et des intersections. L'union représente les deux possibilités d'entrer dans la boucle, soit on n'est jamais entré dans la boucle donc on vient de M_2, soit on a parcouru la boucle et la condition d'entrée est encore satisfaite et par conséquent, on vient de M_8. L'intersection représente le fait que pour entrer dans une boucle ou un branchement conditionnel on doit satisfaire la condition d'entrée, par exemple, au point M_3 on vient soit de M_2 soit de M_8 et pour revenir dans la boucle il faut également que $(j \geq 100)$.

Définition 2.1.1. *Soit $\boldsymbol{X}$ un treillis complet. On dit qu'une application $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ est continue si f est croissante et si pour toute famille dénombrable de $\boldsymbol{X}$, $\{y_a,\ a \in A\}$:*

$$f(\sqcup_{a\in A} y_a) = \sqcup_{a\in A} f(y_a).$$

On sait que le plus petit point fixe d'un application continue f sur les treillis complet est $\sqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\perp)$ (Théorème de Kleene). Ce résultat donne, directement, un algorithme pour calculer le plus petit point fixe appelé *itération de Kleene* : on commence par $x_0 = \perp$, à la $k-ième$ itération, on prend $x_k = x_{k-1} \sqcup f(x_{k-1})$. L'algorithme se termine quand $x_k = x_{k-1}$. On applique l'algorithme sur des fonctions croissantes, non nécessairement continues. On peut rencontrer des itérations ordinales qui ne garantissent plus la convergence en temps fini de l'algorithme. En pratique, comme ces itérations ne s'arrêtent pas en temps fini, on utilise des techniques d'accélération comme les opérateurs d'élargissement (widening $\bigtriangledown$) et de retrécissement (narrowing $\bigtriangleup$). Sur les intervalles, des opérateurs de *widening* et *narrowing* peuvent se définir ainsi :

$$[a,b] \bigtriangledown [c,d] = [e,f] \text{ avec } e = \begin{cases} a & \text{si } a \leq c \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad et\ f = \begin{cases} b & \text{si } d \leq b \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$[a,b] \bigtriangleup [c,d] = [e,f] \text{ avec } e = \begin{cases} c & \text{si } a = -\infty \\ a & \text{sinon} \end{cases} \quad et\ f = \begin{cases} d & \text{si } d = +\infty \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Après un certain nombre d'itération, on remplace $\sqcup$ par $\bigtriangledown$ puis $\bigtriangledown$ est remplacé par $\bigtriangleup$. Ces opérations assurent la convergence vers un point fixe en temps fini, mais ce n'est pas nécessairement le plus petit point fixe : l'utilisation du *widening* retourne un postpoint fixe, alors que l'utilisation du *narrowing* permet d'atteindre un point fixe mais pas nécessairement le plus petit.

$$\begin{array}{lll}
(i_3^1, j_3^1) & = & ([150,150],[175,175]) \\
(i_7^1, j_7^1) & = & \perp \\
(i_8^1, j_8^1) & = & ([151,151],[175,175]) \\
(i_9^1, j_9^1) & = & \perp \\
 & \cdots & \\
(i_3^9, j_3^9) & = & ([150,158],[175,175]) \\
(i_7^9, j_7^9) & = & \perp \\
(i_8^9, j_8^9) & = & ([151,159],[175,175]) \\
(i_9^9, j_9^9) & = & \perp \\
\text{(widening)} & & \\
(i_3^{10}, j_3^{10}) & = & ([150,+\infty[,[175,175])
\end{array}
\quad
\begin{array}{lll}
(i_7^{10}, j_7^{10}) & = & ([149,+\infty[,[173,173]) \\
(i_8^{10}, j_8^{10}) & = & ([151,+\infty[,[173,175]) \\
(i_9^{10}, j_9^{10}) & = & \perp \\
(i_3^{11}, j_3^{11}) & = & ([150,+\infty[,]-\infty,175]) \\
(i_7^{11}, j_7^{11}) & = & ([150,+\infty[,]-\infty,149]) \\
(i_8^{11}, j_8^{11}) & = & ([150,+\infty[,]-\infty,175]) \\
(i_9^{11}, j_9^{11}) & = & ([150,+\infty[,]-\infty,99]) \\
\text{(narrowing)} & & \\
(i_3^{12}, j_3^{12}) & = & ([150,+\infty[,[100,175]) \\
(i_7^{12}, j_7^{12}) & = & ([150,+\infty[,[98,149]) \\
(i_8^{12}, j_8^{12}) & = & ([150,+\infty[,[98,175]) \\
(i_9^{12}, j_9^{12}) & = & ([150,+\infty[,[98,99])
\end{array}$$

FIG. 2.2 – Utilisation du *Widening* et du *Narrowing*

Sur les intervalles, et pour notre exemple figure 2.2, si les opérateurs de *widening* et de *narrowing* sont appliqués après 10 itérations, on obtient la suite d'itérations décrite ci-dessus, où seuls les poins de contrôle 3, 7, 8 et 9 sont indiqués. On écrit (i_l^k, j_l^k) pour les valeurs abstraites à la ligne l et l'itération k pour décrire les valeurs concrètes des variables i et j. *Widening* apparaît entre les itérations 9 et 10 et *narrowing* entre les itérations 11 et 12.

2.2 Nouvelle méthode : l'itération sur les politiques

Dans les articles [CGG⁺05] et [GGTZ07], on décrit la méthode et on obtient quelques résultats sur la minimalité de l'invariant trouvé. Dans cette partie, nous rappelerons les résultats importants de ces deux articles. Pour appliquer cette méthode, on se place dans le contexte suivant :

Définition 2.2.1. *Soit $\mathcal{G}$ une famille d'applications sur un treillis $(\boldsymbol{X}, \prec)$, on dit que $\mathcal{G}$ admet une sélection inférieure si pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, il existe une application $h \in \mathcal{G}$, pour tout $g \in \mathcal{G}$, telle que $h(x) \prec g(x)$.*

Remarque: Si on pose $f = \inf\{g \mid g \in \mathcal{G}\}$ alors la propriété de sélection inférieure est équivalente à

$$\forall\, x \in \mathbf{X},\ \exists\, g \in \mathcal{G} \text{ telle que } f(x) = g(x). \tag{2.2}$$

On dira donc que f admet une sélection inférieure pour la famille $\mathcal{G}$, si elle satisfait (2.2). On dira simplement f admet une sélection inférieure s'il n'y a pas ambiguité sur la famille. Les applications g sont appelées *politiques*.

On considère un treillis complet $(\mathbf{X}, \prec)$. On se donne, aussi, une application f, ainsi qu'une famille $\mathcal{G}$ d'applications g croissantes sur $\mathbf{X}$ admettant une sélection inférieure.

Remarque: Par le théorème de Knaster-Tarski, on sait que les politiques g admettent un plus petit point fixe noté g^-.

On notera g^-, le plus petit point fixe d'une application croissante g sur un treillis complet.

Algorithm 1 Algorithme Itération sur les Politiques

$k \leftarrow 1$; $g_1 \leftarrow$ *politique initiale($\mathcal{G}$)*
while true **do**
  $x_k \leftarrow (g_k^-)$
  if $x_k = f(x_k)$ **then**
    return x_k
  else
    find g such that $f(x_k) = g(x_k)$
    $k \leftarrow k + 1$; $g_k \leftarrow g$
  end if
end while

Algorithm 1 calcule un point fixe d'une application admettant une sélection inférieure. L'algorithme s'initialise avec une politique choisie (*politique initiale* dans l'algorithme), ensuite, l'algorithme calcule le plus petit point fixe d'une politique g_k (à l'itération k). Si le point fixe trouvé est un point fixe de f l'algorithme s'arrête et retourne ce point fixe, sinon l'algorithme trouve une politique g_{k+1} telle que $f(x) = g_{k+1}(x)$, (existe grâce à la propriété de sélection).

Avant les g_k^- étaient calculés par itération de Kleene, depuis [GGTZ07], les g_k^- sont calculés par programmation linéaire. Le théorème suivant de [GGTZ07] prouve que l'algorithme est bien posé et calcule un point fixe.

Théorème 2.2.1. *Soit f une application croissante sur un treillis $\boldsymbol{X}$ admettant une sélection inférieure pour une famille $\mathcal{G}$. On a les deux propriétés suivantes :*

(i.) Si Algorithm 1 s'arrête alors la valeur retournée est un point fixe de f.

(ii.) La suite de point fixe $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ générée par Algorithm 1 est strictement décroissante c'est-à-dire

$$(g_{k+1}^-) \prec (g_k^-)$$

(iii) Si card($\mathcal{G}$) est fini alors Algorithm 1 termine en au plus card($\mathcal{G}$) itérations.

Le théorème suivant [GGTZ07] introduit le problème de minimalité de point fixe.

Théorème 2.2.2. *Soit f une application croissante sur un treillis complet $\boldsymbol{X}$, admettant une sélection inférieure pour une famille $\mathcal{G}$ d'applications g sur $\boldsymbol{X}$. Le plus petit point fixe f^- de f est :*

$$f^- = \inf\{g^- \mid g \in \mathcal{G}\}$$

Malgré ce théorème, Algorithm 1 peut ne pas retourner le plus petit point fixe (voir [CGG$^+$05])). Cependant, dans le cas où le nombre de politiques est fini, et grâce au théorème précédent : lorsqu'un point fixe de f est trouvé à l'itération n, on pourrait scanner tous les plus petits points fixes des politiques restantes $h \in \mathcal{G} \setminus \{g_1, \cdots, g_n\}$, on aurait ainsi les plus petits points fixes de toutes les politiques, le plus élément de tous ces points fixes serait le plus petit point fixe de f. Dans le cas où le nombre de politiques est grand, cette méthode est beaucoup trop coûteuse en temps de calcul.

Le théorème suivant de [CGG$^+$05] nous donne une première condition suffisante de minimalité.

Définition 2.2.2. *Une fonction $f : \bar{\mathbb{R}}^d \to \bar{\mathbb{R}}^d$ est dite contractante au sens large pour la norme sup notée $\|\cdot\|_\infty$ si*

$$\forall\, x, y \in \bar{\mathbb{R}}^d,\ \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty$$

Théorème 2.2.3. *Soit une famille finie $\mathcal{G}$ d'applications sur $\bar{\mathbb{R}}^d$ croissante et contractante au sens large. On suppose que $\mathcal{G}$ admet une sélection inférieure et on pose $f = \inf \mathcal{G}$. L'algorithme 1 s'arrête sur un point fixe fini $x_k = g_k^-$. S'il existe une unique politique $g \in \mathcal{G}$ telle que $f(x_k) = g(x_k)$, alors x_k est le plus petit point fixe de f.*

Dans la figure 2.1, des intersections d'intervalles apparaissaient dans les équations sémantiques. Cependant les intersections rencontrées mettent en relation des intervalles à bornes constantes et des intervalles à bornes variables ce qui rend le calcul de l'intersection délicat. Pour éviter, ce genre de calcul, on va utiliser un calcul approché de cette intersection.

Soient deux intervalles de $\bar{\mathbb{Z}}$, $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$.

$I \cap J$ est toujours contenue dans chacun des quatre intervalles donnés par (2.1) et $I \cap J$ est toujours égale à l'un des quatre ensembles. Dans le treillis des intervalles, les *politiques* pour une intersection $I \cap J$ sont donc les quatre intervalles $ll(I, J)$, $rr(I, J)$, $lr(I, J)$ et $rl(I, J)$.

L application $\cap$ possède donc la propriété de sélection inférieure, si on considère l'ensemble $\mathcal{G} = \{ll, rr, lr, rl\}$.

La politique initiale consiste à choisir l'intervalle qui nous donne le plus d'information. On utilise, par conséquent, l'heuristique suivant qu'on appelera *heuristique classique*.

L'heuristique classique

(1)	On privilégiera une borne finie à une borne infinie.
(2)	On privilégiera une borne constante à une borne variable.
(3)	On privilégiera une borne variable à une borne infinie.

TAB. 2.1 –

Exemple: Calcul approché de $[x, 3] \cap [-\infty, y]$. Par (3), la borne inférieure de $[x, 3] \cap [-\infty, y]$ est x. Par (2), la borne supérieure est 3. Si on avait pris 2 à la place de x, la borne inférieure de l'intersection aurait été 2 grâce à (1).

Chapitre 3

Politique initiale et nombre d'itérations

Dans ce chapitre, nous allons appliquer l'algorithme d'itérations sur les politiques en interprétation abstraite. Les programmes étudiés seront simples pour pouvoir comprendre les mecanismes de l'algorithme pour l'interprétation abstraite.

3.1 Cas de la dimension un

Dans cette partie $[\cdot,\cdot]$ désignera un intervalle d'entiers. Pour un intervalle I, on notera sa borne inférieure i^- et i^+ sa borne supérieure.

On considère le programme suivant, où $c^-, c^+, a \in \mathbb{Z}$:

```
int x;
x=[c⁻,c⁺];            //1
while (x <= a){       //2
        x=g(x);       //3
}                     //4
```

A cause des problèmes d'approximation, on suppose dans ce qui suit que g est un polynôme. De plus, comme g est un polynôme l'image d'un intervalle par g se surapproxime par le calcul par intervalles du chapitre 1. Pour un intervalle I, on notera $\hat{g}(I)$ l'intervalle obtenu par calcul par intervalles approximant l'image de I par g, on aura toujours $\hat{g}(I) \supset [\inf_{i\in I} g(i), \sup_{i\in I} g(i)]$, enfin, on écrira $\hat{g}(I)^-$ la borne inférieure de $\hat{g}(I)$ et $\hat{g}(I)^+$, sa borne supérieure. Si g est monotone sur I, alors $\hat{g}(I)^- = \inf\{g(i^-), g(i^+)\}$ et $\hat{g}(I)^+ = \sup\{g(i^-), g(i^+)\}$. On supposera, de plus, que $c^+ < a$.

On obtient les équations sémantiques suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= [c^-, c^+] \\ x_2 &= (x_1 \cup x_3) \cap [-\infty, a] \\ x_3 &= \hat{g}(x_2) \\ x_4 &= (x_1 \cup x_3) \cap [a+1, +\infty] \end{aligned}$$

Plus précisément :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & [c^-, c^+] \\ x_2 & = & (x_1 \cup [\hat{g}(x_2)^-, \hat{g}(x_2)^+]) \cap [-\infty, a] \\ x_3 & = & [\hat{g}(x_2)^-, \hat{g}(x_2)^+] \\ x_4 & = & (x_1 \cup [\hat{g}(x_2)^-, \hat{g}(x_2)^+]) \cap [a+1, +\infty] \end{array}$$

On pose ensuite,

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & [c^-, c^+] \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_1 \cup [\hat{g}(x_2)^-, \hat{g}(x_2)^+]) \cap [-\infty, a] \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & [\hat{g}(x_2)^-, \hat{g}(x_2)^+] \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_1 \cup [\hat{g}(x_2)^-, \hat{g}(x_2)^+]) \cap [a+1, +\infty] \end{array}$$

On cherche, par conséquent, un vecteur d'intervalle $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ point fixe de f. Les seuls points de contrôle qui posent problème sont les points de contrôle x_2 et x_4. Si on a $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$ et $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$ alors il suffit d'avoir $x_3 = \hat{g}(x_2)$ et $x_1 = \mathbf{C}$ pour que $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ soit un point fixe, ce qui se vérifie facilement. En outre, on peut déduire, aisément, x_4 de x_2. Pour les points de contrôle 2 et 4, on trouve les intervalles suivants :

$$x_2 = [\sup\{\inf\{c^-, \hat{g}(x_2)^-\}, -\infty\}, \inf\{\sup\{c^+, \hat{g}(x_2)^+\}, a\}] \tag{3.1}$$
$$x_4 = [\sup\{\inf\{c^-, \hat{g}(x_2)^-\}, a+1\}, \inf\{\sup\{c^+, \hat{g}(x_2)^+\}, +\infty\}] \tag{3.2}$$

Choisir une politique, c'est fixer qui est le sup pour les bornes inférieures et le inf pour les bornes supérieures. En utilisant l'heuristique classique définie tableau 2.1, on obtient les politiques initiales suivantes pour x_2 et x_4 :

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & [\inf\{c^-, \hat{g}(x_2)^-\}, a] \\ x_4 & = & [a+1, \sup\{c^+, \hat{g}(x_2)^+\}] \end{array}$$

Premièrement, il faut trouver la borne inférieure de x_2, il faut donc résoudre :

$$\sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq c^-,\ z \leq \inf \hat{g}([z, a])\} \tag{3.3}$$

De plus, d'après (3.1), pour que les politiques initiales fournissent un point fixe, il faut que : $\inf\{\sup\{c^+, \hat{g}(x_2)^+\}, a\} = a$, c'est-à-dire :

$$\sup\{c^+, \hat{g}(x_2)^+\} \geq a \tag{3.4}$$

En outre, comme $c^- \leq c^+ < a$, on aura toujours $x_4^- = a + 1$ ou $x_4 = \emptyset$. Les questions à se poser sont donc, comment résoudre (3.3) et dans quel cas avons-nous (3.4) ?

On introduit les ensembles :

$$\mathbf{D}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid g(x) > x\}$$
$$\mathbf{D}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid g(x) < x\}$$

Puis on pose, pour $\alpha \in \bar{\mathbb{Z}}$, $\alpha \leq a$:

$$\begin{array}{rcl} h(\alpha) & = & \inf \hat{g}([\alpha, a]) = \hat{g}([\alpha, a])^- \\ \bar{\beta} & = & \sup\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \leq c^-, \alpha \leq h(\alpha)\} \end{array}$$

$h(\alpha) \leq \inf\{g(y) \mid y \in [\alpha, a]\}$, $\bar{\beta}$ est toujours plus petit que a.

Proposition 3.1.1. *h est une fonction croissante de $[-\infty, a]$ dans $[-\infty, g(a)]$. De plus, si $-\infty < h(-\infty)$ alors $\bar{\beta}$ est fini.*

Démonstration. Si $\alpha = -\infty$ alors $h(\alpha) = -\infty$ ssi g n'est pas minorée, de plus si $h(\alpha) = -\infty$ alors $\alpha = -\infty$ car g est un polynôme donc $g(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Sinon, on suppose $\alpha \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, a]$, $\hat{g}([\alpha, a])$ est un compact de $\mathbb{Z}$ non vide (il contient $g(a)$), on en déduit que $h(\alpha)$ existe et que $h(\alpha) \leq g(a)$.

Prenons $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z} \cap]-\infty, a]$, tels que $\alpha' \leq \alpha$. On a $[\alpha, a] \subset [\alpha', a]$, par conséquent $\hat{g}([\alpha', a])^- \leq \hat{g}([\alpha, a])^-$.

Si $-\infty < h(-\infty)$ alors par croissance de h, il existe $M \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $\alpha \in [-\infty, a]$, $h(\alpha) \geq M$, d'où, pour tout α, $h(\alpha) \geq \inf\{c^-, M\}$ en prenant $\tilde{\alpha} = \inf\{c^-, M\}$, on a bien $h(\tilde{\alpha}) \leq \tilde{\alpha}$ et $\tilde{\alpha} \geq c^-$ donc $\bar{\beta}$ est fini. □

Théorème 3.1.1. *Si $a \in \boldsymbol{D}^+$ alors l'heuristique classique fournit un point fixe dès la politique initiale*

Démonstration. L'heuristique classique nous conduit à prendre a comme borne supérieure de x_2. Comme $\bar{\beta} \leq a$, l'intervalle x_2 contient toujours a, par ailleurs,

$\sup \hat{g}([\bar{\beta}, a]) \geq \sup_{y \in [\bar{\beta}, a]} g(y) \geq g(a) > a$ ce qui implique bien (3.4). □

Exemple: $g(x) = x^3 - 1$, $\mathbf{C} = [-5, -1]$ et $a = 2$.

On a $g(2) = 7$, de plus, pour tout $x \leq -1$, $g(x) \leq g(-1) = -2 < 2$. On conclut que ce programme ne s'arrête pas.

Appliquons l'algorithme pour le programme suivant :

```
x=[-5,-1];          //1
while (x <= 2){     //2
      x=x^3-1;      //3
}                   //4
```

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & [-5, -1] \\ x_2 & = & ([-5, -1] \cup [(x_2^-)^3 - 1, (x_2^+)^3 - 1] \cap [-\infty, 2] \\ x_3 & = & [(x_2^-)^3 - 1, (x_2^+)^3 - 1] \\ x_4 & = & ([-5, -1] \cup [(x_2^-)^3 - 1, (x_2^+)^3 - 1] \cap [3, +\infty] \end{array}$$

L'heuristique classique donne :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & [-5, -1] \\ x_2 & = & [\inf\{-5, (x_2^-)^3 - 1\}, 2] \\ x_3 & = & [(x_2^-)^3 - 1, (x_2^+)^3 - 1] \\ x_4 & = & [3, \sup\{c^+, (x_2^+)^3 - 1\}] \end{array}$$

Par ailleurs, $\bar{\beta} = \sup\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \leq -5, \alpha \leq \alpha^3 - 1\}$, or, sur $[-\infty, -5]$, $k : \alpha \mapsto \alpha^3 - 1 - \alpha$ est croissante. Par conséquent, $k(\alpha) \leq k(-5) = -11 < 0$ et $\bar{\beta} = -\infty$.

On en déduit que $x_2 = [-\infty, 2]$. On obtient finalement le vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) = ([-5,-1], [-\infty, 2], [-\infty, 7], [3, 7])$. On vérifie qu'on obtient bien un point fixe :

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & [-5,-1] \\
x_2 & = & ([-5,-1] \cup [-\infty, 7]) \cap [-\infty, 2] = [-\infty, 7] \cap [-\infty, 2] = [-\infty, 2] \\
x_3 & = & [-\infty, 7] \\
x_4 & = & ([-5,-1] \cup [-\infty, 7]) \cap [3, +\infty] = [-\infty, 7] \cap [3, +\infty] = [3, 7]
\end{array}$$

Remarque: Le programme ne s'arrête pas, cependant $x_4 \neq \emptyset$ alors que cet intervalle devrait représenter les valeurs de sortie possibles de la variable x.

Le déroulement de l'algorithme a été complétement écrit, par la suite on écrira uniquement l'équation sémantique du point de contrôle 2, les autres intervalles à chercher se calculant simplement à partir de cet intervalle. Par ailleurs, il suffira de vérifier, comme dit précédemment que, $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$.

Corollaire 3.1.1. *Si $\boldsymbol{D}^+ = \mathbb{Z}$ alors l'heuristique classique fournit un point fixe dès la politique initiale.*

Remarque: Comme $\mathbf{D}^+ = \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $g(g(x)) > g(x) > x \implies g^{(2)}(x) \geq x+2$
Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $g^{(k)}(x) \geq x + k \ \to +\infty$ quand k tend vers $+\infty$
On conclut qu'avec cette hypothèse sur g le programme s'arrête.

Théorème 3.1.2. *Supposons g croissante, si $a \in \boldsymbol{D}^-$ alors l'heuristique classique fournit un point fixe au bout d'une itération.*

Démonstration. On a toujours $\bar{\beta} \leq a$. Comme g est croissante alors $\sup \hat{g}([\bar{\beta}, a]) = g(a) < a$, par conséquent, (3.4) n'est pas vérifiée et donc on change de politique pour prendre $x_2^+ = \sup\{c^+, \hat{g}([-\infty, a])\}$ qui fournira bien un point fixe. □

Remarque: Si g est croissante, $c^+ < a$ et $\mathbf{D}^- = \mathbb{Z}$, nécessairement $\bar{\beta} = -\infty$. En effet, supposons que $\bar{\beta}$ soit fini. Il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \leq c^-$, tel que $\alpha \leq h(\alpha)$, ce qui implique que $\alpha \leq \inf \hat{g}([\alpha, a]) \leq \inf\{g(y) \mid y \in [\alpha, a]\} \leq g(\alpha)$ Or $\mathbf{D}^- = \mathbb{Z}$ donc $\bar{\beta} = -\infty$.

De plus, comme pour tout $x < a$, $g(x) < x < a$ et que $\mathbf{D}^- = \mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: $g^{(k)}(x) < g^{(k-1)}(x) < \cdots < g(x) < x < a$, le programme ne s'arrête pas.

Exemple: On prend $g(x) = x^3 + x - 2$, $\mathbf{C} = [-5, -1]$ et $a = 1$.

On a : $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = ([-5,-1] \cup [(x_2^-)^3 + x_2^- - 2, (x_2^+)^3 + x_2^- - 2]) \cap [-\infty, 1]$
L'heuristique classique conduit à : $x_2 = [\inf\{-5, (x_2^-)^3 + x_2^- - 2\}, 1]$. On résout (3.3) : $\bar{\beta} = \sup\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \leq -5, \alpha \leq \alpha^3 + \alpha - 2\}$. En utilisant le même type d'argument que dans l'exemple précédent, on montre que $\bar{\beta} = -\infty$. D'où, $x_2 = [-\infty, 1]$, par conséquent, $x_3 = [-\infty, 0]$ et $x_4 = [2, 0] = \emptyset$. On pose $\bar{x} = ([-5,-1], [-\infty, 1], [-\infty, 0], \emptyset)$. $f_2(\bar{x}) = ([-5,-1] \cup [-\infty, 0]) \cap [-\infty, 1] = [-\infty, 0] \cap [-\infty, 1] = [-\infty, 0] \neq [-\infty, 1]$ On change donc de politique, pour prendre $x_2 = [-\infty, 0]$ qui nous donnera un point fixe.

Le cas où g est décroissante demande juste une comparaison pour répondre : g est supposée décroissante, $h(\alpha)$ est une fonction constante qui vaut $g(a)$, on obtient $\bar{\beta} = \inf\{c^-, g(a)\}$, ainsi pour savoir si (3.4) est satisfaite, il suffit de comparer $g(\bar{\beta})$ et a.

3.2 Dimension 2 et approche de la dimension supérieure

On se donne cinq entiers c^-, c^+, d^-, d^+, a. Soient deux polynômes f et g de $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$. Considérons le programme suivant :

```
i=[c^-,c^+];
j=[d^-,d^+];          //1
while (i <= a){       //2
        i=f(i,j);     //3
        j=g(i,j);     //4
}                     //5
```

Dans la suite de l'étude, pour un intervalle, on notera $\hat{f}(I \times J)$ et $\hat{g}(I \times J)$ les intervalles obtenus par calcul par intervalles surapproximant les images respectives de $I \times J$ par f et g. On suppose, par ailleurs, que $c^+ < a$.

Maintenant écrivons les équations sémantiques :

$$\begin{aligned}
(i_1, j_1) &= ([c^-, c^+], [d^-, d^+]) && (3.5)\\
i_2 &= [\inf\{c^-, \inf \hat{f}(i_2 \times j_2)\}, \inf\{\sup\{c^+, \sup \hat{f}(i_2 \times j_2)\}, a\}] && (3.6)\\
j_2 &= [\inf\{d^-, \inf \hat{g}(i_2 \times j_2)\}, \sup\{d^+, \sup \hat{g}(i_2 \times j_2)\}] && (3.7)\\
(i_3, j_3) &= (\hat{f}(i_2 \times j_2), j_2) && (3.8)\\
(i_4, j_4) &= (i_3, \hat{g}(i_2 \times j_2)) && (3.9)\\
(i_5, j_5) &= ([a+1, \sup\{c^+, \sup \hat{f}(i_2 \times j_2)\}], j_2) && (3.10)
\end{aligned}$$

On pose pour $i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ et $j = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)$ deux vecteurs d'intervalles :

$$\begin{aligned}
F_1^1(i,j) &= [c^-, c^+]\\
F_2^1(i,j) &= [\inf\{c^-, \inf \hat{f}(i_2 \times j_2)\}, \inf\{\sup\{c^+, \sup \hat{f}(i_2 \times j_2)\}, a\}]\\
F_3^1(i,j) &= \hat{f}(i_2 \times j_2)\\
F_4^1(i,j) &= i_3\\
F_5^1(i,j) &= [a+1, \sup\{c^+, \sup \hat{f}(i_2 \times j_2)\}]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_1^2(i,j) &= [d^-, d^+]\\
F_2^2(i,j) &= [\inf\{d^-, \inf \hat{g}(i_2 \times j_2)\}, \sup\{d^+, \sup \hat{g}(i_2 \times j_2)\}]\\
F_3^2(i,j) &= j_2\\
F_4^2(i,j) &= \hat{g}(i_2 \times j_2)\\
F_5^2(i,j) &= [\inf\{d^-, \inf \hat{g}(i_2 \times j_2)\}, \sup\{d^+, \sup \hat{g}(i_2 \times j_2)\}]
\end{aligned}$$

Finalement :

$$F(i,j) = \begin{pmatrix} F_1^1(i,j) & , & F_1^2(i,j) \\ F_2^1(i,j) & , & F_2^2(i,j) \\ F_3^1(i,j) & , & F_3^2(i,j) \\ F_4^1(i,j) & , & F_4^2(i,j) \\ F_5^1(i,j) & , & F_5^2(i,j) \end{pmatrix}$$

L'hypothèse $c^+ < a$ implique que $\sup\{\inf\{c^-, \inf \hat{f}([i_2 \times j_2])\}, (a+1)\} = a+1$ donc la borne inférieure de i_5 est $a+1$.

On va, seulement, étudier les équations (3.6), (3.7) et (3.10). Comme dans le cas à une variable, il faut vérifier, pour que l'heuristique classique fournisse un point fixe dès la première politique que, $\inf\{\sup\{c^+, \sup \hat{f}(i_2 \times j_2)\}, a\} = a$, et puisque $c^+ < a$, il faut vérifier si :

$$\sup \hat{f}(i_2 \times j_2) \geq a \tag{3.11}$$

La première question à se poser, c'est comment calculer le sup dans (3.11). En effet, on doit d'abord trouver i_2 et j_2. L'heuristique classique nous donne uniquement la borne supérieure de i_2. Pour avoir la borne inférieure de i_2, on doit résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \leq c^-; \alpha \leq \inf \hat{f}([\alpha, a] \times [\bar{\beta}, \bar{\gamma}])\} \tag{3.12}$$

où $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ sont les solutions respectives des problèmes :

$$\begin{gathered} \sup\{\beta \in \mathbb{Z} \mid \beta \leq d^-; \beta \leq \inf \hat{g}([\bar{\alpha}, a] \times [\beta, \bar{\gamma}])\} \\ \inf\{\gamma \in \mathbb{Z} \mid \gamma \geq d^+; \gamma \geq \sup \hat{g}([\bar{\alpha}, a] \times [\bar{\beta}, \gamma])\} \end{gathered}$$

avec $\bar{\alpha}$ solution du problème (3.12).

On voit clairement apparaître un problème qu'on ne rencontrait pas en dimension un, on manque d'information, la condition d'arrêt porte sur une seule variable, on a a priori quatre inconnues (les bornes des intervalles), l'heuristique classique nous fixe une borne, il reste trois inconnues et toujours une équation.

On va, par conséquent, résoudre indépendemment les trois problèmes d'optimisation précédents et commencer à discuter sur le nombre d'itérations à partir des solutions dans $\bar{\mathbb{Z}}$. Pour cela, on introduit les notations suivantes :

On pose pour $x, y, z \in \bar{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} p_1(y,z) &= \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq c^-,\ w \leq \inf \hat{f}([w,a] \times [y,z])\} \\ p_2(x,z) &= \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq d^-,\ w \leq \inf \hat{g}([x,a] \times [w,z])\} \\ p_3(x,y) &= \inf\{w \in \mathbb{Z} \mid w \geq d^+,\ w \geq \sup \hat{g}([x,a] \times [y,w])\} \end{aligned}$$

Puis on pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+ &= \{i \in \mathbb{Z} \mid \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3,\ \exists\ j \in [p_2(x,z), p_3(x,y)]\ f(i,j) > i\} \\ \mathbf{E}^- &= \{i \in \mathbb{Z} \mid \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3,\ \forall\ j \in [p_2(x,z), p_3(x,y)]\ f(i,j) < i\} \end{aligned}$$

Définition 3.2.1. *Soit $h : \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$. On dit que h admet une signature si, pour $l = \{1, 2\}$, $h_l(i_1, \cdot)$ et $h_l(\cdot, i_2)$ sont monotones (au sens d'une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$).*

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles, on aurait dit que toutes les coordonnées de la jacobienne sont de signe constant.

Pour une fonction h admettant une signature, on notera $\mathcal{S}_h = (s_{lm})_{l,m=1,2}$, la signature de h, la matrice définie par :

$$s_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{si } h_l \text{ est croissante par rapport à la variable } i_m \\ -1 & \text{si } h_l \text{ est décroissante par rapport à la variable } i_m \\ 0 & \text{si } h_l \text{ ne dépend pas de } i_m \end{cases}$$

On pose désormais $h = (h_1, h_2) = (f, g)$ et $i_1 = i, i_2 = j$ et on suppose que h admet une signature. Dans l'étude, on va se restreindre au cas où $\mathcal{S}_h$ est triangulaire.

Premier cas :$\mathcal{S}_h$ *est triangulaire inférieure*

Comme, la condition de boucle porte uniquement sur i, sachant que l'évolution de i ne dépend que de la fonction f indépendante de j, on ne s'intéressera pas à g.

$\mathcal{S}_h$ est triangulaire inférieure, alors pour tout $(y, z) \in \mathbb{Z}^2$:

$$p_1(y, z) = \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq c^-,\ w \leq \inf\{f(w), f(a)\}\}$$

Par conséquent, la fonction p_1 est constante.

Par ailleurs,

$$\mathbf{E}^+ = \{i \in \mathbb{Z} \mid f(i) > i\}$$

On se ramène donc au cas d'une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exemple:

```
void main(){
int i,j;
i=[-5,-1];              //1
j=0;                    //2
while(i <= 6){          //3
      i=i^3+i-2;        //4
      j=j+1;            //5
      }                 //6
}
```

On peut assimiler j à un compteur de boucle, par exemple. D'après la partie précédente, on sait que l'heuristique classique renvoie un point fixe au bout d'une itération.

Deuxième cas :$\mathcal{S}_h$ *est triangulaire supérieure non diagonale*

Premièrement, comme $\mathcal{S}_h$ est triangulaire supérieure non diagonale on obtient :

$$
\begin{aligned}
p_1(y,z) &= \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq c^-,\ w \leq \inf\{f(w,y), f(w,z), f(a,y), f(a,z)\}\} \\
p_2(x,z) &= \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq d^-,\ w \leq \inf\{g(w), g(z)\}\} = p_2(z) \\
p_3(x,y) &= \inf\{w \in \mathbb{Z} \mid w \geq d^+,\ w \geq \sup\{g(y), g(w)\}\} = p_3(y)
\end{aligned}
$$

De plus, comme g est monotone, p_2 ou p_3 est constante. Il suffira, dans ce cas, de remplacer z ou y par cette constante pour connaître les bornes de j_2 ainsi que la borne inférieure de i_2. On a, donc, $j_2 = [p_2, p_3]$ et on pose :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^+ = \{i \in \mathbb{Z} \mid \exists\ j \in [p_2, p_3],\ f(i,j) > i\} \\
\mathbf{E}^- = \{i \in \mathbb{Z} \mid \forall\ j \in [p_2, p_3],\ f(i,j) < i\}
\end{aligned}
$$

Théorème 3.2.1. *Si $a \in \boldsymbol{E}^+$, l'heuristique classique nous donne un point fixe dès la politique initiale.*

Démonstration. On a toujours, $a = i_2^+$ grâce à (1) de 2.1. De plus $a \in \mathbf{E}^+$ entraîne : $\sup \hat{f}([i_2 \times j_2]) = f(a, \bar{\jmath}) > a$ où $\bar{\jmath}$ est l'entier j tel que $f(a,j) > a$, ce qui implique (3.11). □

Exemple:

```
void main(){
int i,j;
i=[0,4];
j=0;                    //1
while(i <= 10){         //2
      i=i+j;            //3
      j=j+1;            //4
      }                 //5
}
```

Aux points de contrôle 2, grâce à l'heuristique classique, les équations sémantiques sont :

$$
\begin{aligned}
i_2 &= [\inf\{0, i_2^- + j_2^-\}, 10] \\
j_2 &= [\inf\{0, j_2^- + 1\}, \sup\{0, j_2^+ + 1\}]
\end{aligned}
$$

Calulons p_1, p_2 et p_3 :

$$
\begin{aligned}
p_1(y,z) &= \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq 0,\ w \leq w + y\} \\
p_2(x,z) &= \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq 0,\ w \leq w + 1\} = 0 \\
p_3(x,y) &= \inf\{w \in \mathbb{Z} \mid w \geq 0,\ w \geq w + 1\}\} = +\infty
\end{aligned}
$$

En remplaçant y par 0, on a $p_1(0,z) = 0$ et donc la borne inférieure de $i_2 = 0$.

En posant : $(\tilde{\imath}_2, \tilde{\jmath}_2) = ([0, 10], [0, +\infty])$, on a bien :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\imath}_2 & = & [\inf\{0, \tilde{\imath}_2^- + \tilde{\jmath}_2^-\}, \inf\{\sup\{4, \tilde{\imath}_2^+ + \tilde{\jmath}_2^+)\}, 10\}] \\ \tilde{\jmath}_2 & = & [\inf\{0, \tilde{\jmath}_2^- + 1)\}, \sup\{0, \tilde{\jmath}_2^+ + 1\}] \end{array}$$

Théorème 3.2.2. *Si $a \in \boldsymbol{E}^-$ et que s_{11} est positif, l'heuristique classique donne un point fixe au bout d'une itération.*

Démonstration. Comme f est croissante par rapport à la variable i et que $a \in \mathbf{E}^-$ on a : $\sup \hat{f}([i_2 \times j_2]) = f(a, \bar{\jmath}) < a$ où $\bar{\jmath}$ est le point de $j \in \bar{\mathbb{Z}}$ pour lequel $j \mapsto f(a, j)$ est maximale. □

Exemple: On change ici $f(i, j) = i + j$ en $f(i, j) = i - j$.

```
void main(){
int i,j;
i=[0,4];                //1
j=1;                    //2
while(i <= 10){         //3
      i=i-j;            //4
      j=j+1;            //5
      }                 //6
}
```

L'heuristique classique conduit aux équations sémantiques suivantes :

$$\begin{array}{rcl} i_2 & = & [\inf\{0, i_2^- - j_2^+\}, 10] \\ j_2 & = & [\inf\{0, j_2^- + 1\}, \sup\{0, j_2^+ + 1\}] \end{array}$$

Calulons p_1, p_2 et p_3 :

$$\begin{array}{rcl} p_1(y, z) & = & \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq 0,\ w \leq w - z\} \\ p_2(x, z) & = & \sup\{w \in \mathbb{Z} \mid w \leq 1,\ w \leq w + 1\} = 1 \\ p_3(x, y) & = & \inf\{w \in \mathbb{Z} \mid w \geq 1,\ w \geq w + 1\}\} = +\infty \end{array}$$

En remplaçant z par $-\infty$, on a $p_1(y, -\infty) = -\infty$ et donc la borne inférieure de $i_2 = -\infty$. En posant : $(\tilde{\imath}_2, \tilde{\jmath}_2) = ([-\infty, 10], [1, +\infty])$, on a : $[\inf\{0, \tilde{\imath}_2^- - \tilde{\jmath}_2^+\}, \inf\{\sup\{4, \tilde{\imath}_2^+ - \tilde{\jmath}_2^-)\}, 10\}] = [-\infty, 9] \neq [-\infty, 10]$. Par conséquent, on change de politique et on prend $i_2 = [\inf\{0, i_2^- - j_2^+\}, \sup\{4, i_2^+ - j_2^-\}]$ qui nous donnera un point fixe.

Remarque: Le manque d'information conduit à un encadrement très large de l'intervalle du point de contrôle 5, on approxime cet intervalle comme si la boucle était parcourue indéfiniment même en cas d'arrêt du programme.

On va maintenant récapituler les résultats sous forme de tableau.

Dimension 1		nombre d'itérations
g quelconque	$a \in \mathbf{D}^+$	0
	$a \in \mathbf{D}^-$	pas de réponse
g croissante	$a \in \mathbf{D}^+$	0
	$a \in \mathbf{D}^-$	1
g décroissante	$a \in \mathbf{D}^+$	0
	$a \in \mathbf{D}^-$	0 si $g(\inf\{g(a), c^-\}) \geq a$, 1 sinon

Dimension 2		nombre d'itérations
$\mathcal{S}_h$ triangulaire inférieure	$a \in \mathbf{E}^+$	0
	$a \in \mathbf{E}^-$	1 si $s_{11} > 0$
		si $s_{11} < 0$, 0 si $f(\inf\{f(a), c^-\}) \geq a$, 1 sinon
$\mathcal{S}_h$ triangulaire supérieure non diagonale	$a \in \mathbf{E}^+$	0
	$a \in \mathbf{E}^-$	1 si $s_{11} > 0$ sinon pas de réponse

En conclusion de ce travail introductif, on voit que le nombre d'itération de l'algorithme dépend, en fait, de la façon dont évolue chaque variable c'est-à-dire qu'il dépend des opérations de boucles. Le cas en dimension 2 peut se généraliser en dimension supérieure (finie) en introduisant les mêmes ensembles.

Il serait intéressant d'établir des conclusions similaires sur des programmes comportant plusieurs boucles, des boucles imbriquées car on augmenterait le nombre de politiques.

Nous avons remarqué que le changement de politiques permettait d'avoir une surapproximation plus fine des valeurs possibles des variables du programme, cependant, les derniers exemples montrent que les surapproximations peuvent rester très larges. Ces problèmes introduisent le problème de minimalité de l'invariant. Dans la partie suivante, on va mettre en place une théorie qui permet de trouver et de vérifier la minimalité de l'invariant. Dans tout problème d'optimisation, on essaye d'avoir une condition du premier ordre pour vérifier la minimalité d'une fonction, on va donc introduire une notion différente de la notion classique de dérivabilité : la semidifférentiabilté.

Chapitre 4

Minimalité : approche par les rayons spectraux et les semidifférentielles

Dans l'algorithme d'itération sur les politiques, on sait que l'on s'arrête sur un point fixe, cependant celui-ci n'est pas a priori minimal. Dans l'étude de la minimalité, on s'intéressera ici aux points fixes à coordonnées finies, on cherchera donc des points fixes minimaux par rapport à l'ordre produit usuel de $\mathbb{R}^d$.

On va utiliser les rayons spectraux d'applications homogènes et les semidifférentielles afin de trouver une méthode pour le plus petit point fixe fini d'une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

4.1 Préliminaires

Pour une fonction f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, on notera $\mathbf{F}(f)$ l'ensemble des points fixes de f i.e l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^d$ tels que $f(x) = x$.

Rappel 4.1.1. *On note $\leq$, l'ordre classique de $\mathbb{R}^d$, qui est tel que $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \; \forall\, i \in [\![1, d]\!]$.*

Définition 4.1.1. *On dit qu'un ensemble $\boldsymbol{C}$ est borné inférieurement si*

$$\exists\; b \in \mathbb{R}^d,\ \textit{tel que, pour tout } c \in \boldsymbol{C},\ b \leq c.$$

De manière équivalente,

$$\exists\; \eta \in \mathbb{R},\ \textit{tel que},\ \forall\; c \in \boldsymbol{C},\ \eta \ \leq c_i,\ \forall\; i \in [\![1, d]\!].$$

Définition 4.1.2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, on dit que f est croissante si*

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

Dans la suite de l'étude, f désignera une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ croissante et continue. On se place, désormais, dans $\mathbb{R}^d$. On munit naturellement $\mathbb{R}$ de la valeur absolue et $\mathbb{R}^d$ de la norme sup qu'on notera $\|\cdot\|$. On munit également $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire classique noté $\langle \cdot\cdot, \cdot\cdot \rangle$.

On va établir, à titre d'exemple, un critère d'existence d'un plus petit point fixe fini.

Proposition 4.1.1. *Si $\boldsymbol{F}(f)$ est borné inférieurement et s'il existe un minorant a de $\boldsymbol{F}(f)$, tel que $\{f^k(a), k \geq 0\}$ soit aussi borné inférieurement alors $\boldsymbol{F}(f)$ admet un plus petit élément.*

Démonstration. Soit a un minorant de $\mathbf{F}(f)$ tel que $\{f^k(a), k \leq 0\}$ soit borné inférieurement. Posons $z = \inf \mathbf{F}(f)$. Pour tout $u \in \mathbf{F}(f)$, $z \leq u$, par croissance de f, $f(z) \leq f(u) = u$, $\forall\, u \in \mathbf{F}(f)$, par conséquent $f(z) \leq z$.

En outre, on a, par croissance de f, pour tout k entier naturel, $f^k(a) \leq f^k(z) \leq z$ et, de plus, la suite $(f^k(z))_{k \geq 0}$ est décroissante et minorée, elle converge vers $b \in \mathbb{R}^d$. Par conséquent, pour tout $k \geq 0$, $b \leq f^k(z) \leq z$, et par ailleurs par continuité de f, $f(b) = f(\lim_{k \mapsto +\infty} f^k(z)) = \lim f^{k+1}(z) = b$.

Finalement, $b \leq z$ et $f(b) = b$ donc $z \leq b$ d'où $b = z$, et z appartient à $\mathbf{F}(f)$, donc z est le plus petit élément de $\mathbf{F}(f)$. □

Après avoir montré, avec des hypothèses simples, l'existence d'un plus petit point fixe fini, on introduit les premières définitions à la base du travail effectué.

Définition 4.1.3. *On dit qu'un ensemble $\boldsymbol{C}$ est un cône si pour tout λ réel positif ou nul et pour tout $x \in \boldsymbol{C}$, $\lambda x \in \boldsymbol{C}$.*

Définition 4.1.4. *Soit $\boldsymbol{C}$ un cône, et soit g est application de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$. g est dite homogène (de degré un), si pour tout réel positif λ, $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.*

Définition 4.1.5. *Soit $\boldsymbol{C}$ un cône de $\mathbb{R}^d$, pour une fonction g de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$, homogène et continue, on définit le rayon spectral $\rho_{\boldsymbol{C}}(g)$ de g, relativement à $\boldsymbol{C}$ de la manière suivante :*

$$\rho_{\boldsymbol{C}}(g) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \exists\, x \in \boldsymbol{C}\backslash\{0\}, g(x) = \lambda x\}$$

Définition 4.1.6. *Soit $\boldsymbol{C}$ un cône convexe fermé, on dit que $\boldsymbol{C}$ est pointé si $\boldsymbol{C} \cap -\boldsymbol{C} = \{0\}$.*

Lemme 4.1.1. *Si $\boldsymbol{C}$ est un cône convexe fermé pointé non réduit à $\{0\}$ alors il existe une forme linéaire continue ψ telle que :*

$$\langle \psi, c \rangle > 0 \textit{ pour tout } c \in \boldsymbol{C} \backslash\{0\}.$$

Pour rester cohérent avec la théorie spectrale des matrices, on va montrer que le rayon spectral ainsi défini est toujours positif ou nul. On va, donc, montrer que pour toute fonction continue dont l'image d'un certain type de cône est inclus dans ce cône il existe toujours un “vecteur propre“ non nul et une “valeur propre“ positive ou nul. L'hypothèse d'homogénéité n'est pas utilisée ici. Le résultat est classique nous en donnons une preuve pour la commodité du lecteur.

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [DR01], lemme 2.4.8. □

Proposition 4.1.2. *Si $\boldsymbol{C}$ est un cône convexe fermé pointé non réduit à $\{0\}$ alors pour tout $g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ continue $\rho_{\boldsymbol{C}}(g)$ est positif ou nul, c'est-à-dire que g admet une valeur propre positive et un vecteur propre non nul.*

Démonstration. S'il existe x dans $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ tel que $g(x)=0$, alors en prenant $\lambda=0$, il existe $x\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$ tel que $g(x)=\lambda x$ d'où $\rho_{\mathbf{C}}(g)\geq 0$.

Sinon,

$$\forall\ x\in\mathbf{C}\setminus\{0\},\ g(x)\in\mathbf{C}\setminus\{0\}. \tag{4.1}$$

En prenant la forme linéaire du lemme 4.1.1, on pose

$$\Sigma=\{x\in\mathbf{C}\mid\psi(x)=1\}=\mathbf{C}\cap\{x\in\mathbb{R}^d\mid\psi(x)=1\}.$$

Pour savoir si Σ est borné, calculons son cône asymptotique Σ^∞ donné par, $\Sigma^\infty=\{d\in\mathbb{R}^d\mid\forall t>0,\forall x\in\Sigma,\ x+td\in\mathbf{C},\psi(x+td)=1\}$.

Σ est l'intersection de convexes fermés non vides, donc :

$$\Sigma^\infty=\mathbf{C}^\infty\cap\{x\in\mathbb{R}^d\mid\psi(x)=1\}^\infty \tag{4.2}$$

Comme $\mathbf{C}$ est un cône convexe fermé $\mathbf{C}^\infty=\mathbf{C}$, (4.2) devient

$$\Sigma^\infty=\{d\in\mathbf{C}\mid\ \forall t>0,\ \forall x\in\Sigma,\ \psi(x+td)=1\}$$

puis, $\Sigma^\infty=\{d\in\mathbf{C}\mid\ \forall t>0,\ \forall x\in\Sigma,\ \psi(x)+t\psi(d)=1\}$ enfin, grâce au lemme 4.1.1,

$$\Sigma^\infty=\{d\in\mathbf{C}\mid\psi(d)=0\}=\{0\}$$

Pour tout convexe D fermé non vide, D est borné ssi $D^\infty=\{0\}$, on conclut que Σ est borné.

Par conséquent, Σ est convexe compact (dimension finie) et ne contient pas 0.

Pour $x\in\Sigma$, on pose $\hat{g}(x)=\frac{g(x)}{\psi(g(x))}$, on a bien grâce à (4.1) $\psi(g(x))\neq 0$. De plus, $\hat{g}(x)$ est continue de Σ dans Σ, par le théorème de Brouwer, $\hat{g}(x)$ possède un point fixe $\bar{x}\in\Sigma$ donc non nul.

On obtient par conséquent, $g(\bar{x})=\psi(g(\bar{x}))\bar{x}$, donc il existe $\lambda>0$ et x dans $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ tel que $g(x)=\lambda x$.

En conclusion, $\rho_{\mathbf{C}}(g)$ est positif ou nul pour toute fonction $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ continue. □

On va maintenant introduire une notion plus faible de différentiabilité qui reste compatible avec l'utilisation du rayon spectral.

Définition 4.1.7. *Soit $f:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^d$. Soit $u\in\mathbb{R}^d$, f est dite semidifférentiable au point u s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction g homogène continue tels que pour tout $h\in\mathcal{V}$:*

$$f(u+h)=f(u)+g(h)+o(\|h\|)$$

L'application g est unique. Elle est appelée semidifférentielle de f au point u et est notée f'_u.

Exemple: $f(x)=\sup(x+3,0)$. Au point $x=-3$, f n'est pas dérivable.

Mais :

$$f(-3+t)=f(-3)+\sup(t,0)+0$$

La fonction $t\mapsto\sup(t,0)$ est homogène et continue, f est semidifférentiable en -3 et la semidifférentielle de f en -3 est, par conséquent, $t\mapsto\sup(t,0)$.

Remarque: Si f est semidifférentiable au point u, on a pour tout $t > 0$ et pour tout h dans un certain voisinage de 0 :

$$f(u+th) = f(u) + tf'_u(h) + o(t\|h\|)$$

il s'en suit que

$$f'_u(h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(u+th)-f(u)}{t}$$

elle coïncide avec la dérivée directionnelle unilatérale de f au point u dans la direction h.

Lemme 4.1.2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, f est semidifférentiable si et seulement si pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, f_i est semidifférentiable. La semidifférentielle de f en u est le vecteur des semidifférentielles des f_i.*

Proposition 4.1.3 (Rockafellar et Wets 98)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, f est semidifférentiable en u de semidifférentielle f'_u si et seulement si*

$$\lim_{\substack{t\to 0^+\\ h'\to h}} \frac{f(u+th')-f(u)}{t} = f'_u(h).$$

Une démonstration de la proposition est faite par Rockafellar and Wets dans [RW98].

En utilisant, le lemme 4.1.2 et ce résultat on obtient le même résultat pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ semidifférentiable.

4.2 Principaux résultats

Dans tout problème d'optimisation, on essaye d'introduire une condition du premier ordre (annulation de la dérivée, sous-différentiel contenant 0...). Ici, la condition du premier ordre sera donnée par la semidifférentielle.

Définition 4.2.1. *Un point fixe u est dit localement minimal s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de u tel que :*

$$\forall\, v \in \mathcal{V},\ \ f(v) = v \text{ et } v \leq u \implies v = u.$$

Exemple:

$$f(x) = \sup(-4, x, 2x-3) \tag{4.3}$$

$\mathbf{F}(f) = [-4, 3]$, -4 est localement minimal.

Théorème 4.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. Soit $u \in \boldsymbol{F}(f)$. On suppose, de plus, que f est semidifférentiable en u.*

1. *u est localement minimal;*
2. *f'_u n'admet pas de point fixe non nul dans $\mathbb{R}^d_-$;*
3. *$\rho_{\mathbb{R}^d_-}(f'_u) < 1$.*

On a $3 \implies 2 \implies 1$.

Exemple: On reprend la fonction f de (4.3). En 3, la semidifférentielle vaut $t \mapsto \sup(2t, t)$, si $t \leq 0$ alors la semidifférentielle restreinte à $\mathbb{R}_-$ est l' identité, elle admet, donc, un point fixe négatif et le rayon spectral vaut 1.

Démonstration. $3 \implies 2$, par définition du rayon spectral.

$2 \implies 1$, on va montrer en réalité, $\neg 1 \implies \neg 2$. Supposons que u ne soit pas localement minimal : $\forall\ r > 0,\ \exists\ h \in B(0, r) \cap \mathbb{R}^d_-,\ h \neq 0$, tel que $u + h \in \mathbf{F}(f)$. Prenons une suite $\{r_n\}_{n \geq 0}$ tendant vers 0. Pour tout n, il existe $h_n \in B(0, r_n) \cap \mathbb{R}^d_-$ tel que $u + h_n \in \mathbf{F}(f)$ avec $h_n \neq 0$. Posons, $y_n = \frac{h_n}{\|h_n\|} \in S(0,1) \cap \mathbb{R}^d_-$ compact en dimension finie, il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ croissante et $\bar{y}$ de norme 1 et à coordonnées négatives, tels que

$$\lim_{n \to +\infty} y_{\phi(n)} = \bar{y}.$$

On obtient, par la proposition 3.1.3,

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{f(u + \|h_{\phi(n)}\| y_{\phi(n)}) - f(u)}{\|h_{\phi(n)}\|} - f'_u(\bar{y}) \right\| = 0$$

d'où, comme u et $u + \|h_\phi(n)\| y_{\phi(n)}$ sont dans $\mathbf{F}(f)$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{u + \|h_{\phi(n)}\| y_{\phi(n)} - u}{\|h_{\phi(n)}\|} - f'_u(\bar{y}) \right\| = 0$$

puis,

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| y_{\phi(n)} - f'_u(\bar{y}) \right\| = 0$$

ce qui entraîne,

$$\|\bar{y} - f'_u(\bar{y})\| = 0.$$

Finalement, on a montré qu'il existe $\bar{y}$ non nul à coordonnées négatives qui est un point fixe de f'_u. □

Définition 4.2.2. *On dit que f est affine par morceaux si elle est continue et s'il existe une famille finie de convexes fermés $\{C_i\}_{i \in I}$, telle que*

$$\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{i \in I} C_i,\ \forall\ l, k \in I,\ l \neq k,\ int(C_l) \cap int(C_k) = \emptyset. \tag{4.4}$$

et $h_{|C_i}$ est affine pour tout $i \in I$ i.e pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $h_{j_{|C_i}}$ est affine.

Il serait plus intuitif de supposer que les C_i soient des polyèdres mais S.Ovchinnikov montre qu'on obtient les mêmes classes de fonctions avec des convexes fermés d'intérieur non vides.[Ovc02]

Après cette définition géométrique d'affine par morceaux, on va donner une définition équivalente, plus analytique, qui nous rapprochera des fonctions étudiées par la suite.

Lemme 4.2.1. *h est affine par morceaux ssi pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, il existe un ensemble fini A, une famille d'ensembles finis $\{B_a\}_{a\in A}$ et une famille de fonctions affines $\{g_{a,b}\}_{a\in A, b\in B_a}$ vérifiant :*

$$h_j = \min_{a\in A} \max_{b\in B_a} g_{a,b}$$

Dans la suite, on posera $g_{a,b} = \langle m_{a,b}, \cdot\rangle + \ p_{a,b}$ où $m_{a,b}$ vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $p_{a,b}$ appartient à $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2.1. *Si f est affine par morceaux alors, f est semidifférentiable pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. De plus, on a pour tout $j \in [\![1,d]\!]$*

$$(f'_u)_j = \min_{a\in \bar{A}} \max_{b\in \bar{B}_a} \langle m_{a,b}, \cdot\rangle$$

où $\bar{A} = \{a \in A \mid f_j(u) = \max_{b\in B_a} g_{a,b}(u)\}$ et $\bar{B}_a = \{b \in B_a \mid f_j(u) = \min_{a\in A} g_{a,b}(u)\}$.

Démonstration. On utilise le théorème de semidifférentiation sous le signe sup énoncé par T.Rockafellar et J-B.Wets dans [RW98] exercice 10.27 , dans le cas où les inf et sup portent sur un nombre fini de fonctions affines. Pour un résultat plus général on peut consulter [AGN] de M.Akian, S.Gaubert et R.Nussbaum. □

Lemme 4.2.2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction affine par morceaux. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de u tel que pour tout $u + h \in \mathcal{V}$,*

$$f(u+h) = f(u) + f'_u(h)$$

Démonstration. Puisque f est affine par morceaux pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, il existe un ensemble fini A, des ensembles finis $\{B_a\}_{a\in A}$ et une famille finie de fonctions affines $g_{a,b}$ tels que :

$$f_j = \min_{a\in A} \max_{b\in B_a} g_{a,b}$$

Soient $\bar{A} = \{a \in A \mid f_j(u) = \max_{b\in B_a} g_{a,b}(u)\}$ et $\bar{B}_a = \{b \in B_a \mid f_j(u) = \min_{a\in A} g_{a,b}(u)\}$. Il existe $\mathcal{V}_j$ tel que $f_{j|\mathcal{V}_j} = \min_{a\in\bar{A}} \max_{b\in\bar{B}_a} g_{a,b}$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $u + h \in \mathcal{V}_j$:

$$f_j(u+h) = \min_{a\in \bar{A}} \max_{b\in \bar{B}_a} g_{a,b}(u+h)$$

Ce qui equivaut à :

$$f_j(u+h) = \min_{a\in \bar{A}} \max_{b\in \bar{B}_a} (g_{a,b}(u) + \langle m_{a,b}, h\rangle)$$

Et $\min_{a\in\bar{A}} \max_{b\in\bar{B}_a} g_{a,b}(u) = f_j(u)$ donc constant ce qui implique :

$$f_j(u+h) = f_j(u) + \langle m_{a,b}, h\rangle$$

.

On conclut par la prop.4.2.1 que $f_j(u+h) = f_j(u) + (f_j)'_u(h)$. Puis, en prenant $\mathcal{V} = \cap \mathcal{V}_j$, on conclut que $f(u+h) = f(u) + f'_u(h)$ par le lemme 4.1.2. □

Théorème 4.2.2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, et soit $u \in \boldsymbol{F}(f)$, si, de plus, f est affine par morceaux, alors u est localement minimal si et seulement si f'_u n'admet pas de point fixe non nul dans $\mathbb{R}^d_-$.*

Démonstration. Le théorème découle directement du lemme 4.2.2. On a vu que $\mathbf{F}_{\mathbb{R}^d_-}(f'_u) = \{0\}$ entrainait que u était localement minimal. Supposons que f'_u est un point fixe négatif non nul que l'on notera $\bar{z}$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de u tel que lemme.4.2.2 soit vrai. Il existe $\lambda \geq 0$, tel que $u + \lambda\bar{z} \in \mathcal{V}$. Comme f'_u est homogène alors $\lambda\bar{z}$ est un point fixe négatif de f'_u. et $u + \lambda\bar{z} \leq u$. En prenant un voisinage $\mathcal{W}$ quelconque de u, on peut toujours trouver $\lambda \geq 0$ tel que $u + \lambda\bar{z} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{V}$ et donc u n'est pas localement minimal. □

Exemple: On reprend la fonction f de (4.3). En -4, la semidifférentielle vaut $t \mapsto \sup(0, t)$, elle n'admet pas de point fixe négatif.

Dans cette partie, on trouvera souvent des additions de vecteurs et d'une constante, en réalité, il s'agira de l'addition d'un vecteur et du vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à cette constante. De même pour les inégalités entre des vecteurs et des constantes, on écrira $z \leq \mu$ avec μ dans $\mathbb{R}$ pour dire que z est plus petit que le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à μ, le contexte précisera quelles sont les additions et inégalités classiques et les additions et inégalités constantes-vecteurs.

Définition 4.2.3. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, f est dite contractante au sens large si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.*

Rappelons que la norme $\|\cdot\|$ définit la norme sup, la contraction s'entend donc au sens de cette norme.

Proposition 4.2.2. *Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction contractante et soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si g est semidifférentiable en x, alors g'_x est contractante.*

Démonstration. Soient $h, h' \in \mathbb{R}^d$. Fixons $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$ tels que pour tout $|t| \leq \alpha$ et $|t'| \leq \alpha'$, $\left\|\frac{g(x+th) - g(x)}{t} - g'_x(h)\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $\left\|\frac{g(x+t'h') - g(x)}{t'} - g'_x(h')\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

En prenant $\bar{\alpha} = \inf\{\alpha, \alpha'\}$ on obtient pour tout $|t| \leq \bar{\alpha}$,

$$\left\|\frac{g(x+th) - g(x)}{t} - {g'}_x(h)\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\left\|\frac{g(x+th') - g(x)}{t} - {g'}_x(h')\right\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\|g'_x(h) - g'_x(h')\| &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\|g(x+th) - g(x) - g(x+th') + g(x)\| \\
&= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\|g(x+th) - g(x+th')\|
\end{aligned}$$

g étant contractante, $\|g'_x(h) - g'_x(h')\| \leq \lim_{t \to 0^+} t\frac{1}{t}\|h - h'\|$, on conclut que, $\|g'_x(h) - g'_x(h')\| \leq \|h - h'\|$. □

Remarque: Si g est homogène et continue sur cône fermé $\mathbf{C}$ non vide non réduit à $\{0\}$ alors $g(0) = 0$. En effet, si on prend un point x de $\mathbf{C}$ et une suite $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to 0^+$ on a d'une part, $g(\lambda_n x) = \lambda_n g(x) \to 0$, par homogénéité et $g(x) < \infty$ et d'autre part, $g(\lambda_n x) \to g(0)$, par continuité.

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 4.2.3. *Soit $\boldsymbol{C}$, un cône convexe fermé pointé non réduit à $\{0\}$. Soit g : $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ est homogène continue et contractante alors $\rho_{\boldsymbol{C}}(g) \leq 1$.*

Démonstration. Supposons $\rho_{\mathbf{C}}(g) > 1$. Il existe $\mu > 1$ et $x \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, tels que $g(x) = \mu x$. D'où $\|g(x) - g(0)\| = \|g(x)\| = \mu \|x\| > \|x\|$, or g est contractante donc $\|g(x) - g(0)\| \leq \|x\|$ contradiction. □

On conclut par le résultat suivant :

Théorème 4.2.3. *Soit f : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction contractante au sens large et soit $u \in \mathbb{R}^d$. Si, de plus, f est semidifférentiable en u alors f'_u n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}^d_-$ ssi $\rho_{\mathbb{R}^d_-}(f'_u) < 1$.*

Lemme 4.2.3. *Il existe une application $P : \mathbb{R}^d \to \boldsymbol{F}(f)$ croissante contractante au sens large qui vérifie $P^2 = P$ et telle que $\boldsymbol{F}(P) = \boldsymbol{F}(f)$, où $\boldsymbol{F}(P)$ désignent l'ensemble des points fixes de P.*

Démonstration. Comme f est contractante au sens large et que $u \in \mathbf{F}(f)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|f^k(x) - f^k(u)\| \leq \|x - u\|$, donc $\|f^k(x) - u\| \leq \|x - u\|$, par conséquent $f^k(x)$ est dans la boule fermée centrée en u fixé de rayon $\|x - u\|$, on en déduit que $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$Q(x) = \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} f^n(x) = \lim_{k \to +\infty} \sup_{m \geq k} f^m(x)$$

Comme $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée, $Q(x)$ existe et est unique. En outre, à k fixé

$$\sup_{n \geq k} f^n(x) \geq f^m(x) \textit{ pour tout } m \geq k$$

comme f est croissante,

$$f(\sup_{n \geq k} f^n(x)) \geq f(f^m(x)) \textit{ pour tout } m \geq k$$

en prenant le sup sur $m \geq k$ à droite on obtient

$$f(\sup_{n \geq k} f^n(x)) \geq \sup_{m \geq k} f(f^m(x))$$

en faisant tendre k vers $+\infty$, et en utilisant la continuité de f (l'interversion de f avec la limite), on obtient

$$f(Q(x)) \geq Q(x).$$

Finalement, par croissance de f, on déduit que $\{f^l(Q(x))\}_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée car bornée, elle converge et on peut poser, ensuite,

$$P(x) = \lim_{l \to +\infty} f^l(Q(x))$$

f est contractante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x) - f^n(y) \leq \|x - y\|$$
$$f^n(y) - f^n(x) \leq \|x - y\|$$

ceci implique,

$$f^n(x) \leq f^n(y) + \|x - y\|$$
$$f^n(y) \leq f^n(x) + \|x - y\|$$

puis,

$$\inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} f^l(x) \leq \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} f^l(y) + \|x - y\| \tag{4.5}$$

$$\inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} f^l(y) \leq \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} f^l(x) + \|x - y\| \tag{4.6}$$

Par (4.5) et (4.6), on conclut que Q est contractante au sens large.

En réutilisant le fait que f est contractante :

$$f^l(Q(x)) - f^l(Q(y)) \leq \|x - y\|$$
$$f^l(Q(y)) - f^l(Q(x)) \leq \|x - y\|$$

En faisant tendre l vers $+\infty$, on conclut que P est contractante. De plus, P est croissante car f l'est. Enfin $f(P(x)) = f(\lim f^l(x)) = \lim f^{l+1}(x) = P(x)$, ce qui entraîne que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $P(x) \in \mathbf{F}(f)$. Par ailleurs,

$$P(P(x)) = \lim_{l\to+\infty} f^l[\limsup_{k\to+\infty} f^k(P(x))]$$

d'où

$$P(P(x)) = P(x)$$

puisque $P(x) \in \mathbf{F}(f)$.

On a montré que $\mathbf{F}(P) \subset \mathbf{F}(f)$, la réciproque est évidente car on ne prend uniquement que des itérées de f donc si $z \in \mathbf{F}(f)$, il en est de même pour ces itérées. □

Théorème 4.2.4. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ et soit $u \in \boldsymbol{F}(f)$, supposons f contractante au sens large alors u est localement minimal si et seulement si u est le plus petit point fixe.*

Démonstration. Prenons une application P comme dans le lemme 4.2.3.

On suppose que u est localement minimal mais pas le plus petit point fixe. Il existe $v \in \mathbf{F}(f)$, tel que $\inf(v, u) < u$.

On pose $\omega_t = \inf(v + t, u)$ avec $t \geq 0$. Soit $t_0 = \inf\{t > 0 \mid \omega_t = u\}$.

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de u, il existe $t_1 < t_0$ tel que $\omega_{t_1} \in \mathcal{V}$. De plus, P est contractante au sens large et $\mathbf{F}(f) = \mathbf{F}(P)$, on a donc : $\|P(\omega_{t_1}) - P(u)\| = \|P(\omega_{t_1}) - u\| \leq \|\omega_{t_1} - u\|$ et on en déduit que $P(\omega_{t_1}) \in \mathcal{V}$. Comme $P(\mathbb{R}^d) = \mathbf{F}(f)$, on obtient $P(\omega_{t_1}) \in \mathbf{F}(f)$.

Vérifions que $P(\omega_{t_1}) \neq u$.

P est contractante d'où : $P(v + t_1) - P(v) \leq t_1$ ce qui implique $P(v + t_1) \leq P(v) + t_1$ donc $P(v + t_1) \leq v + t_1$. De plus, par croissance de P, on a $P(\omega_{t_1}) \leq u$, il s'en suit, toujours par croissance, que $P(\omega_{t_1}) \leq \inf(P(v + t_1), P(u)) \leq \inf(v + t_1, u) = \omega_{t_1} < u$. Par conséquent $P(\omega_{t_1}) \in \mathcal{V} \cap \mathbf{F}(f)$ et donc u n'est pas localement minimal.contradiction

Finalement, u localement minimal implique que u est le plus petit point fixe. La réciproque est immédiate. □

En conclusion, on concaténant les théorèmes 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4, si f est affine par morceaux et contractante au sens large, on obtient une condition nécéssaire et suffisante de minimalité de point fixe fini :

Théorème 4.2.5 (Fondamental)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, croissante, affine par morceaux et contractante. Soit $u \in \boldsymbol{F}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est le plus petit point fixe ;*
2. *f'_u n'a pas de point fixe non nul dans $\mathbb{R}^d_-$;*
3. *$\rho_{\mathbb{R}^d_-}(f'_u) < 1$.*

4.3 Exemples et applications à l'analyse statique de programmes

Dans cette partie, on utilisera les additions et inégalités constantes-vecteurs, elles seront définies comme dans la partie précédente.

Premièrement, on va énoncer deux propositions permettant de vérifier qu'une fonction est contractante :

Proposition 4.3.1. *Soit une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ croissante. Si, de plus, f est sous-homogène c'est-à-dire :*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^d,\ f(x+\lambda) \leq f(x) + \lambda$$

alors f est contractante.

Remarque: Supposons que f soit sous-homogène.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_-$ et $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = f((x+\lambda)-\lambda) \leq f(x+\lambda)-\lambda$, d'où $f(x)+\lambda \leq f(x+\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_-$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$y - \|x-y\| \leq x \leq y + \|x-y\|$$

comme f est croissante,

$$f(y - \|x-y\|) \leq f(x) \leq f(y + \|x-y\|)$$

enfin par sous-homogénéité de f

$$f(y) - \|x-y\| \leq f(x) \leq f(y) + \|x-y\|$$

On conclut que f est contractante. □

Proposition 4.3.2. *Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ croissante. On suppose qu'il existe un ensemble fini I, une famille d'ensemble $\{J_i\}_{i\in I}$ et une famille $\{g_{i,j}\}_{(i,j)\in(I\times J_i)}$ de fonctions contractantes telles que $g = \min_{i\in I}\max_{j\in J_i} g_{i,j}$. Alors g est contractante.*

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, pour tout $(i,j) \in I \times J_i$

$$g_{i,j}(x) - g_{i,j}(y) \leq \|x - y\| \tag{4.7}$$
$$g_{i,j}(y) - g_{i,j}(x) \leq \|x - y\| \tag{4.8}$$

(4.7) et (4.8) deviennent :

$$g_{i,j}(x) \leq g_{i,j}(y) + \|x - y\| \tag{4.9}$$
$$g_{i,j}(y) \leq g_{i,j}(x) + \|x - y\| \tag{4.10}$$

Puis, par passage au min-max, (4.9) et (4.10) impliquent :

$$g(x) \leq g(y) + \|x - y\|$$
$$g(y) \leq g(x) + \|x - y\|$$

Donc g est bien contractante. □

Exemple:[1]

Voici est un premier programme, simple, pour illustrer les théorèmes précédents :

```
int x,
x=0              //1
while(x<=99){    //2
      x=1-x;     //3
}                //4
```

Avec la convention : on note un intervalle $I = [-i^-, i^+]$, on a le système d'équations sémantiques suivantes : (les x_i représentent les intervalles au point de contrôle i)

$$\begin{aligned} x_1 &= [0,0] \\ x_2 &= (x_1 \cup x_3) \cap]-\infty, 99] \\ x_3 &= 1 - x_2 \\ x_4 &= (x_1 \cup x_3) \cap [99, +\infty[\end{aligned}$$

On a donc $-x_3^- = 1 - x_2^+$ ce qui entraîne $x_3^- = x_2^+ - 1$, et $x_3^+ = 1 - (-x_2^-) = 1 + x_2^-$.
On obtient les équations min-max suivantes au point de contrôle 2 :

$$\begin{aligned} x_2^- &= 0 \vee (x_2^+ - 1) \\ x_2^+ &= 99 \wedge (0 \vee (x_2^- + 1)) \end{aligned}$$

En suivant l'heuristique classique, on trouve $x_2^+ = 99$ et on en déduit que $x_2^- = 98$.
On pose, pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \vee (y-1) \\ 99 \wedge (0 \vee (x+1)) \end{pmatrix}.$$

F est le min-max de fonctions affines. De plus F est croissante. En appliquant la proposition 4.3.2, on peut voir que F est contractante au sens large.

On vérifie facilement que $(\bar{x}, \bar{y}) = (98, 99)$ est un point fixe de F. On va, maintenant, souligner les fonctions affines qui atteignent le min-max pour le point $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \vee \underline{(\bar{y} - 1)} \\ \underline{99} \wedge (0 \vee \underline{(\bar{x} + 1)}) \end{pmatrix}$$

D'après la proposition 4.2.1, F a pour semidifférentielle au point $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$F'_{(\bar{x},\bar{y})} = \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \wedge h_1 \end{pmatrix}$$

En restreignant $F'_{(\bar{x},\bar{y})}$ sur $\mathbb{R}^2_-$ alors on obtient :

$$F'_{(\bar{x},\bar{y})}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'ensemble des points fixes non nuls de $F'_{(\bar{x},\bar{y})}$ à coordonnées négatives sont les points $h = (h_1, h_2)$, h non nul tels que $h_1 = h_2$.

On conclut, $(\bar{x}, \bar{y})$, n'est pas globalement minimal par th.4.2.5. De plus, d'après le lemme 4.2.2, on sait qu'il existe $t < 0$ tel que $(\bar{x}, \bar{y}) + (t, t)$ soit un point fixe de F.

Calculons $F((\bar{x}, \bar{y}) + (t, t))$.

$$F((\bar{x}, \bar{y}) + (t, t)) = \begin{pmatrix} 0 \vee (99 + t - 1) \\ 99 \wedge (0 \vee (98 + t + 1)) \end{pmatrix}$$

On voit facilement qu'en prenant $t = -98$, le point obtenu est un point fixe de F, c'est même le plus petit point fixe.

Exemple:[2]

Tiré de [CGG+05]

```
void main(){
int i,j;
i=1;                //1
j=10;               //2
while(j>= i){       //3
      i=i+2;        //4
      j=j-1;        //5
      }             //6
}
```

En prenant la convention suivante : un intervalle I s'écrit $[-i^-, i^+]$,et en remarquant que :

$i_2^- = -1$, $i_2^+ = 1$, $j_2^- = -10$ et $j_2^+ = 10$. $i_5 = i_3 + 2$ c'est à dire, d'une part que, $-i_5^- = -i_3^- + 2$ ce qui entraîne $i_5^- = i_3^- - 2$ et d'autre part, $i_5^+ = i_3^+ + 2$. $j_5 = j_3 - 1$ c'est à dire, d'une part que, $-j_5^- = -j_3^- - 1$ ce qui signifie $j_5^- = j_3^- + 1$, et d' autre part, $j_5^+ = j_3^+ - 1$.

On obtient les huit équations min-max, (on soulignera les politiques initiales) :

$$\begin{array}{rcl} i_3^- & = & i_2^- \vee (i_3^- - 2) \\ i_3^+ & = & \underline{[j_2^+ \vee (j_3^+ - 1)]} \wedge [i_2^+ \vee (i_3^+ + 2)] \\ j_3^- & = & \underline{[i_2^- \vee (i_3^- - 2)]} \wedge [(j_2^- \vee (j_3^- + 1)] \\ j_3^+ & = & j_2^+ \vee (j_3^+ - 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} i_6^- & = & [i_2^- \vee (i_3^- - 2)] \wedge \underline{[(j_2^- \vee (j_3^- + 1)) - 1]} \\ i_6^+ & = & i_2^+ \vee (i_3^+ + 2) \\ j_6^- & = & j_2^- \vee (j_3^- + 1) \\ j_6^+ & = & \underline{[(i_2^+ \vee (i_3^+ + 2)) - 1]} \wedge [j_2^+ \vee (j_3^+ - 1)] \end{array}$$

on obtient :

$$\begin{array}{rcl} i_3^- & = & -1 \\ i_3^+ & = & 10 \\ j_3^- & = & -1 \\ j_3^+ & = & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} i_6^- & = & -1 \\ i_6^+ & = & 12 \\ j_6^- & = & 0 \\ j_6^+ & = & 11 \end{array}$$

Or :

$$[(i_2^+ \vee (i_3^+ + 2)) - 1] \wedge [j_2^+ \vee (j_3^+ - 1)] = [(1 \vee 12) - 1] \wedge (10 \vee 9) = 11 \wedge 10 = 10$$

Et $j_6^+ = 11$ donc le point trouvé précemment n'est pas un point fixe et cela nous conduit à un changement de politique, on prend maintenant $j_6^+ = [j_2^+ \vee (j_3^+ - 1)] = 10 \vee (10 - 1) = 10$.

On notera $(\bar{\imath}, \bar{\jmath}) = (-1, 10, -1, 12, -1, 10, 0, 10)$.

Posons :

$$F\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} i_3^- \\ i_3^+ \\ i_6^- \\ i_6^+ \\ j_3^- \\ j_3^+ \\ j_6^- \\ j_6^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \vee & (i_3^- - 2) \\ 10 \vee (j_3^+ - 1) & \wedge & 1 \vee (i_3^+ + 2) \\ -1 \vee (i_3^- - 2) & \wedge & (-10 \vee (j_3^- + 1)) - 1 \\ 1 & \vee & (i_3^+ + 2) \\ -1 \vee (i_3^- - 2) & \wedge & (-10 \vee (j_3^- + 1) \\ 10 & \vee & (j_3^+ - 1) \\ -10 & \vee & (j_3^- + 1) \\ (1 \vee (i_3^+ + 2)) - 1 & \wedge & 10 \vee (j_3^+ - 1) \end{pmatrix}$$

F est clairement croissante, contractante par prop.4.3.2 et affine par morceau par lemme 4.2.1. Le point $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$ est un point fixe de F. Nous allons souligner les fonctions qui atteignent le min-max au point $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$.

$$
F\begin{pmatrix} \bar{\imath} \\ \bar{\jmath} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\underline{-1} & \vee & (\overline{\imath_3^-} - 2) \\
\underline{10} \vee (\overline{\jmath_3^+} - 1) & \wedge & 1 \vee (\overline{\imath_3^+} + 2) \\
\underline{-1} \vee (\overline{\imath_3^-} - 2) & \wedge & (-10 \vee \underline{(\overline{\jmath_3^-} + 1))} - 1 \\
1 & \vee & \underline{(\overline{\imath_3^+} + 2)} \\
\underline{-1} \vee (\overline{\imath_3^-} - 2) & \wedge & (-10 \vee (\overline{\jmath_3^-} + 1) \\
\underline{10} & \vee & (\overline{\jmath_3^+} - 1) \\
-10 & \vee & \underline{(\overline{\jmath_3^-} + 1)} \\
(1 \vee (\overline{\imath_3^+} + 2)) - 1 & \wedge & \underline{10} \vee (\overline{\jmath_3^+} - 1)
\end{pmatrix}
$$

Le calcul de la semidifférentielle de F au point $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$ donne, par prop.4.2.1 :

$$
F'_{(\bar{\imath},\bar{\jmath})}\begin{pmatrix} \delta\bar{\imath} \\ \delta\bar{\jmath} \end{pmatrix} = F'_{(\bar{\imath},\bar{\jmath})}\begin{pmatrix}
\delta\overline{\imath_3^-} \\ \delta\overline{\imath_3^+} \\ \delta\overline{\imath_6^-} \\ \delta\overline{\imath_6^+} \\ \delta\overline{\jmath_3^-} \\ \delta\overline{\jmath_3^+} \\ \delta\overline{\jmath_6^-} \\ \delta\overline{\jmath_6^+}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \wedge \delta\overline{\jmath_3^-} \\ \delta\overline{\imath_3^+} \\ 0 \\ 0 \\ \delta\overline{\jmath_3^-} \\ 0
\end{pmatrix}
$$

On voit facilement que le seul point fixe de $F'_{(\bar{\imath},\bar{\jmath})}$ sur $\mathbb{R}^8_-$ est le point fixe nul. Par conséquent $(\bar{\imath}, \bar{\jmath})$, par th.4.2.5 est le plus petit point fixe de F.

Exemple: Le programme est un programme simple avec une boucle imbriquée.

```
int x,int y,
x=[0,2];y=[10,15]   //1
while(x<=y){        //2
      x=x+1;        //3
     while(5<=y){   //4
           y=y-1;   //5
            }       //6
      }             //7
```

Les points de contrôle intéressants sont les points de contrôle 2, 4, 6 et 7 car ils font intervenir des intersections. On soulignera, dans un premier temps les politiques initiales utilisées. En prenant la convention : un intervalle I s'écrit $[-i^-, i^+]$, on obtient les équations min-max suivantes :

Pour le point de contrôle 2, on a le système d'équations suivantes (P_2) :

$$
\begin{aligned}
x_2^- &= x_1^- \vee x_6^- \\
x_2^+ &= (x_1^+ \vee x_6^+) \wedge \underline{(y_1^+ \vee y_6^+)} \\
y_2^- &= \underline{(x_1^- \vee x_6^-)} \wedge (y_1^- \vee y_6^-) \\
y_2^+ &= y_1^+ \vee y_6^+
\end{aligned}
$$

Au point de contrôle 4, le système (P_4)

$$
\begin{aligned}
y_4^- &= (y_3^- \vee y_5^-) \wedge \underline{-5} \\
y_4^+ &= y_3^+ \vee y_5^+
\end{aligned}
$$

De plus, $x_4 = x_3$ et $x_3 = x_2 + 1$, on a aussi $x_4 = x_5 = x_6$. Par $x_3 = x_2 + 1$, on entend, d'une part, $-x_3^- = -x_2^- + 1$ ce qui signifie $x_3^- = x_2^- - 1$ et d'autre part,$x_3^+ = x_2^+ + 1$.

Au point de contrôle 6, le système (P_6)

$$\begin{array}{rcl} y_6^- & = & y_3^- \vee y_5^- \\ y_6^+ & = & (y_3^+ \vee y_5^+) \wedge \underline{4} \end{array}$$

Par ailleurs, $y_5 = y_4 - 1$ ce qui veut dire, d'une part, $-y_5^- = -y_4^- - 1$ qui est équivalant à $y_5^- = y_4^- + 1$ et d'autre part, que $y_5^+ = y_4^+ - 1$

Et enfin, au point de contrôle 7, le système (P_7)

$$\begin{array}{rcl} x_7^- & = & (x_1^- \vee x_6^-) \wedge \underline{((y_1^- \vee y_6^-) - 1)} \\ x_7^+ & = & (x_1^+ \vee x_6^+) \\ y_7^- & = & (y_1^- \vee y_6^-) \\ y_7^+ & = & (y_1^+ \vee y_6^+) \wedge \underline{((x_1^+ \vee x_6^+) - 1)} \end{array}$$

Donc (P_2) donne :

$$\begin{array}{rcl} x_2^- & = & 0 \vee (x_2^- - 1) = 0 \\ x_2^+ & = & 15 \vee 4 = 15 \\ y_2^- & = & 0 \vee -1 = 0 \\ y_2^+ & = & 15 \vee 4 = 15 \end{array}$$

(P_4) donne :

$$\begin{array}{rcl} y_4^- & = & -5 \\ y_4^+ & = & 15 \vee (y_4^+ - 1) = 15 \end{array}$$

(P_6) donne :

$$\begin{array}{rcl} y_6^- & = & 0 \vee -4 = 0 \\ y_6^+ & = & 4 \end{array}$$

Enfin (P_7) donne :

$$\begin{array}{rcl} x_7^- & = & (-10 \vee 0) - 1 = -1 \\ x_7^+ & = & 2 \vee 16 = 16 \\ y_7^- & = & -10 \vee 0 = 0 \\ y_7^+ & = & (2 \vee 16) - 1 = 15 \end{array}$$

On note

$$\begin{array}{rcl} (\bar{x}, \bar{y}) & = & (\bar{x}_2^-, \bar{x}_2^+, \bar{x}_7^-, \bar{x}_7^+, \bar{y}_2^-, \bar{y}_2^+, \bar{y}_4^-, \bar{y}_4^+, \bar{y}_6^-, \bar{y}_6^+, \bar{y}_7^-, \bar{y}_7^+)^\intercal \\ & = & (0, 15, -1, 16, 0, 15, -5, 15, 0, 4, 0, 15)^\intercal \end{array}$$

On pose :

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \\ x_7^- \\ x_7^+ \\ y_2^- \\ y_2^+ \\ y_4^- \\ y_4^+ \\ y_6^- \\ y_6^+ \\ y_7^- \\ y_7^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vee & (x_2^- - 1) \\ 2 \vee (x_2^+ + 1) & \wedge & 15 \vee y_6^+ \\ 0 \vee (x_2^- - 1) & \wedge & (-10 \vee y_6^-) - 1 \\ 0 & \vee & (x_2^+ + 1) \\ 0 \vee (x_2^- - 1) & \wedge & -10 \vee y_6^- \\ 15 & \vee & y_6^+ \\ y_2^- \vee (y_4^- + 1) & \wedge & -5 \\ y_2^+ & \vee & y_4^+ - 1 \\ y_2^- & \vee & y_4^- + 1 \\ y_2^+ \vee (y_4^+ - 1) & \wedge & 4 \\ -10 & \vee & y_6^- \\ 15 \vee y_6^+ & \wedge & (2 \vee (x_2^+ + 1)) - 1 \end{pmatrix}$$

F est clairement affine par morceaux par le lemme 4.2.1, croissante et contractante par prop.4.3.2. Par ailleurs, le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point fixe de F.

On va, comme précédemment souligner les fonctions qui atteignent le min-max, pour le point $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$F\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} & \vee & (\bar{x}_2^- - 1) \\ 2 \vee (\bar{x}_2^+ + 1) & \wedge & \underline{15} \vee \bar{y}_6^+ \\ 0 \vee (\bar{x}_2^- - 1) & \wedge & (-10 \vee \underline{\bar{y}_6^-}) - 1 \\ 0 & \vee & \underline{(\bar{x}_2^+ + 1)} \\ \underline{0} \vee (\bar{x}_2^- - 1) & \wedge & -10 \vee \underline{\bar{y}_6^-} \\ \underline{15} & \vee & \bar{y}_6^+ \\ \bar{y}_2^- \vee (\bar{y}_4^- + 1) & \wedge & \underline{-5} \\ \underline{\bar{y}_2^+} & \vee & \bar{y}_4^+ - 1 \\ \underline{\bar{y}_2^-} & \vee & \bar{y}_4^- + 1 \\ \bar{y}_2^+ \vee (\bar{y}_4^+ - 1) & \wedge & \underline{4} \\ -10 & \vee & \underline{\bar{y}_6^-} \\ \underline{15} \vee \bar{y}_6^+ & \wedge & (2 \vee \underline{(\bar{x}_2^+ + 1)}) - 1 \end{pmatrix}$$

La semidifférentielle de F au point $(\bar{x}, \bar{y})$ est, par prop.4.2.1 :

$$F'_{(\bar{x},\bar{y})}\begin{pmatrix} \delta\bar{x} \\ \delta\bar{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \delta\bar{x}_2^- \\ \delta\bar{x}_2^+ \\ \delta\bar{x}_7^- \\ \delta\bar{x}_7^+ \\ \delta\bar{y}_2^- \\ \delta\bar{y}_2^+ \\ \delta\bar{y}_4^- \\ \delta\bar{y}_4^+ \\ \delta\bar{y}_6^- \\ \delta\bar{y}_6^+ \\ \delta\bar{y}_7^- \\ \delta\bar{y}_7^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\bar{y}_6^- & \\ & \delta\bar{x}_2^+ & \\ 0 & \wedge & \delta\bar{y}_6^- \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\bar{y}_2^+ & \\ & \delta\bar{y}_2^- & \\ & 0 & \\ & \delta\bar{y}_6^- & \\ 0 & \wedge & \delta\bar{x}_2^+ \end{pmatrix}$$

On voit aisément, que $F'_{(\bar{x},\bar{y})}$ admet un point fixe non nul, même une famille de point fixe non nul dans $\mathbb{R}^{12}$, appelons-la $h_t = (0,0,t,0,t,0,0,0,t,0,t,0)^\intercal$ où $t < 0$.

On sait, lemme 4.2.2, qu'il existe $t_0 < 0$ tel que pour tout $t_0 < t < 0$, $(\bar{x},\bar{y}) + h_t$ est un point fixe de F.

Calculons $F((\bar{x},\bar{y}) + h_t)$.

$$F((\bar{x},\bar{y}) + h_t) = F\begin{pmatrix} & 0 & \\ & 15 & \\ -1 & + & t \\ & 16 & \\ & t & \\ & 15 & \\ & -5 & \\ & 15 & \\ & t & \\ & 4 & \\ & t & \\ & 15 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 15 & \\ 0 & \wedge & (-10 \vee t) - 1 \\ & 16 & \\ 0 & \wedge & -10 \vee t \\ & 15 & \\ t \vee -4 & \wedge & -5 \\ & 15 & \\ t & \vee & -4 \\ & 4 & \\ -10 & \vee & t \\ & 15 & \end{pmatrix}$$

On remarque que la contrainte sur t la plus forte est $t \geq -4$ pour que $(\bar{x},\bar{y}) + h_t$ reste un point fixe entier de F, par conséquent on peut prendre $t = -4$. On obtient donc le point fixe suivant $(\tilde{x},\tilde{y}) = (0,15,-5,16,-4,15,-5,15,-4,4,-5,15)^\intercal$.

La semidifférentielle en ce point est, par prop.4.2.1 :

$$F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}\begin{pmatrix} \delta\tilde{x} \\ \delta\tilde{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \delta\tilde{x}_2^- \\ \delta\tilde{x}_2^+ \\ \delta\tilde{x}_7^- \\ \delta\tilde{x}_7^+ \\ \delta\tilde{y}_2^- \\ \delta\tilde{y}_2^+ \\ \delta\tilde{y}_4^- \\ \delta\tilde{y}_4^+ \\ \delta\tilde{y}_6^- \\ \delta\tilde{y}_6^+ \\ \delta\tilde{y}_7^- \\ \delta\tilde{y}_7^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\tilde{y}_6^- & \\ & \delta\tilde{x}_2^+ & \\ & \delta\tilde{y}_6^- & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\tilde{y}_2^+ & \\ \delta\tilde{y}_2^- & \vee & \delta\tilde{y}_4^- \\ & 0 & \\ & \delta\tilde{y}_6^- & \\ 0 & \wedge & \delta\tilde{x}_2^+ \end{pmatrix}$$

Pour que $(\delta\tilde{x},\delta\tilde{y})$ soit un point fixe à coordonnées négatives de $F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}$, il faut que $\delta\tilde{y}_6^- = \delta\tilde{y}_2^- \vee 0$ ce qui conduit à $\delta\tilde{y}_6^- \geq 0$ mais $\delta\tilde{y}_6^- \leq 0$ donc $\delta\tilde{y}_6^- = 0$ ce qui entraîne que le seul point fixe négatif de $F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^{12}_-$, on conclut que le point $(\tilde{x},\tilde{y})$ est le plus petit point fixe de F par th.4.2.5.

Dans ce chapitre, on a trouvé un moyen de vérifier la minimalité d'un point. De plus, si ce point fixe n'est pas minimal, la méthode nous donne une direction de descente vers un point fixe plus petit grâce à la semidifférentielle. Par ailleurs, le calcul de cette dernière est facilement implémentable dans le cas affine par morceaux (prop.4.2.1), il suffit de garder en mémoire les fonctions affines qui atteignent le min-max et de les dériver, c'est-à-dire garder en mèmoire le coefficient directeur. Toutefois, le calcul du vecteur de descente peut s'avérer délicat car il s'agit de résoudre une équation de point fixe. Une alternative de vérification de minimalité est donnée par le rayon spectral (th.4.2.5). En annexe, on énoncera quelques idées pour donner un encadrement du rayon spectral.

Chapitre 5

Conclusions et Perspectives

Le chapitre 2 est une partie introductive servant à comprendre les mécanismes de l'algorithme d'itérations sur les politiques en interprétation abstraite. Elle permet d'établir un lien entre des classes de programme et le nombre d'itération de l'algorithme. Dans un futur travail, on pourra généraliser les résultats, dans un premier temps, à des fonctions moins régulières en étudiant les "vitesses" de croissance des fonctions par rapport à chaque variable du programme (comme les matrices jacobiennes). Par la suite, on pourra généraliser les résultats aux programmes avec des branchements conditionnels et des boucles imbriqués ou avec plusieurs branchements conditionnels et plusieurs boucles en général car dans ces programmes, on pourrait rencontrer des cas où le nombre d'itérations dépasse 1. Puis, on pourrait étudier la relation entre la politique initiale et le nombre d'itérations dans des domaines abstraits comme les zones, les templates de Manna et les zones dites SDP.

Dans l'article [CGG+05] (**Théorème 2.2.3** ici), on avait une condition suffisante de minimalité du point fixe. Pendant ce stage, en se restreignant aux fonctions croissantes, affines par morceaux et contractantes pour la norme sup, on a trouvé une condition de minimalité pour les points fixes à coordonnées finies (**Théorème 4.2.5**). Dans tous les exemples de la partie minimalité, nous nous sommes servis de la semidifférentielle pour conclure sur la minimalité du point fixe.

Ce critère permet, d'une part, si le seul point fixe négatif de la semidifférentielle au point trouvé par l'algorithme d'itération sur les politiques est 0, de conclure que le point fixe est minimal, d'autre part, si la semidifférentielle admet un point fixe négatif non nul, ce critère, nous donne une direction de descente vers un point fixe plus petit.

Dans les exemples, le calcul de la semidifférentielle est simple et même implémentable, il suffit de garder en mémoire les fonctions affines qui atteignent le min-max pour le point fixe trouvé par l'algorithme puis de les dériver (**proposition 4.2.1**). Ensuite, on trouve à la main, malheureusement, une direction de descente **lemme 4.2.2**. En effet, trouver un point fixe négatif non nul peut s'avérer compliqué, par exemple s'il nécessite l'utilisation d'un algorithme de point fixe.

Le **théorème 4.2.5** nous donne une alternative via le rayon spectral dont une méthode d'encadrement est donnée en annexe. Ce type d'encadrement nous permettrait de vérifier la minimalité du point fixe numériquement.

La suite de ce travail consistera, dans un premier temps, à mettre en place un algorithme efficace pour vérifier la minimalité d'un point fixe fini. Ensuite, on pourra s'intéresser au point fixe infini, c'est-à-dire au point fixe dont au moins une coordonnée est infinie. Puis, on pourra poursuivre l'étude sur des fonctions plus générales que les fonctions contractantes affines par morceaux.

Enfin, l'étude, très importante, de la complexité de l'algorithme devra elle aussi apparaître dans de futurs travaux.

Annexe A

Méthode de calcul du rayon spectral

En dimension finie, pour un cône $\mathbf{C}$ convexe fermé pointé non réduit à $\{0\}$ et d'intérieur non vide et une fonction continue, croissante et homogène g, on va pouvoir encadrer le rayon spectral de g.

On va introduire une autre définition du rayon spectral.

Définition A.0.1. *Soit une fonction continue g homogène de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$.*

$$\hat{\rho}_{\boldsymbol{C}}(g) = \sup_{x \in \boldsymbol{C}} \limsup_{k \to \infty} \|g^k(x)\|^{\frac{1}{k}}$$

J.Mallet-Paret et R.D.Nussbaum ont montré dans [MPN02] que

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) = \hat{\rho}_{\mathbf{C}}(g)$$

R.D.Nussbaum a montré dans [Nus86], qu'en prenant $\mathbf{C} = \mathbb{R}^d_+$, on a, de plus :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) = \inf_{x \in int(\mathbf{C})} \max_{1 \leq i \leq d} \frac{g_i(x)}{x_i}$$

En prenant $\mathbf{C} = \mathbb{R}^d_-$ et $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ on obtient le même résultat.

Nous supposerons maintenant que $\underline{\mathbf{C} = \mathbb{R}^d_-}$.

Prenons k entier naturel et supposons de plus qu'il existe $y \in int(\mathbf{C})$, tel que $g^k(y) \in int(\mathbf{C})$.

Comme, par ailleurs,

$$\rho_{\mathbf{C}}(g^p) = (\rho_{\mathbf{C}}(g))^p \tag{A.1}$$

pour tout $p \geq 1$ entier, on obtient :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) \leq \max_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{g_i^{k+p}(y)}{g_i^k(y)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{A.2}$$

En prenant $k = 0$, on déduit que, pour tout $p \geq 1$ entier :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) \leq \max_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{g_i^p(y)}{y_i} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{A.3}$$

En outre,

$$\max_{1\le i\le d}\left(\frac{g_i^p(y)}{y_i}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{\max_{1\le i\le d} g_i^p(y)}{\min_{1\le i\le d} y_i}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ce qui implique,

$$\max_{1\le i\le d}\left(\frac{g_i^p(y)}{y_i}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{\min_{1\le i\le d} -g_i^p(y)}{\max_{1\le i\le d} -y_i}\right)^{\frac{1}{p}}$$

en posant $M = \max_{1\le i\le d} -y_i > 0$, on conclut que,

$$\max_{1\le i\le d}\left(\frac{g_i^p(y)}{y_i}\right)^{\frac{1}{c}} \le M^{-\frac{1}{p}}\|g^p(y)\|^{1\backslash p} \tag{A.4}$$

En prenant la lim inf puis la lim sup quand $p\to\infty$ de l'expression à droite de l'inégalité (A.4) et en utilsant le fait que $\rho_{\mathbf{C}}(g) = \hat{\rho}_{\mathbf{C}}(g) = \sup_{x\in\mathbf{C}} \limsup_{k\to\infty}\|g^k(x)\|^{1\backslash k}$, on conclut que l'expression à droite de (A.3) converge vers $\rho_{\mathbf{C}}(g)$ quand $p\to\infty$.

En utilisant cette majoration, on converge vers $\rho_{\mathbf{C}}$, mais elle est numériquement difficile à mettre en place. Une autre solution possible, serait de mettre en place une structure récursive, en reprenant (A.2), prendre $p=1$, et faire tendre $k\to+\infty$, on étudierait ainsi la croissance des coordonnées des orbites, il suffirait de garder en mémoire le précédent vecteur prendre l'image par g du vecteur et calculer les quotients coordonnées par coordonnées de l'image nouvellement calculée et du vecteur en mémoire. Cependant la convergence n'est pas garantie, mais ce type d'algorithme est plus facilement implémentable.

On peut aussi supposer que $g^k(y)$ a un comportement géométrique périodique c'est à dire qu'il existe $P\ge 1$ et $L>0$ (on peut relaxer en prenant $L\in\mathbb{R}^d$), tels que $g^{k+P}(y) = L^P g^k(y)$. On prendrait alors $p=P$ et ainsi la condition $\rho_{\mathbf{C}}(g)<1$ serait plus facilement vérifiable.

Pour la borne inférieure on a une approximation large du rayon spectral.

Prenons $x\in int(\mathbf{C})$, et posons $\alpha = \min_{1\le i\le d}\dfrac{g_i^p(x)}{x_i}$, on obtient par conséquent :

$$g^p(x)\ge \alpha x$$

Comme $x\in int(\mathbf{C})$, pour tout $i\in[\![1,d]\!]$:

$$\frac{g_i^p(x)}{x_i}\ge\alpha$$

En prenant le maximum sur $i\in[\![1,d]\!]$ puis l'infimum sur $x\in int(\mathbf{C})$, on conclut grâce à (A.1) que :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g)\ge\left(\min_{1\le i\le d}\frac{g_i^p(x)}{x_i}\right)^{1\backslash p}$$

Cette minoration est vraie quelque soit $x\in int(\mathbf{C})$. Cependant comment choisir ce x pour avoir une minoration intéressante.

Annexe B

Preuves complémentaires de la partie Minimalité

Nous revenons, dans cette partie, sur quelques lemmes et propositions.

Nous reprenons le lemme 4.1.1, avec une version plus algébrique de la démonstration. Ce genre de résultat se trouve dans [Ber78].

Lemme B.0.1. *Si $\boldsymbol{C}$ est un cône convexe fermé pointé non réduit à $\{0\}$ alors il existe une forme linéaire continue ψ telle que*

$$\langle \psi, c\rangle \neq 0 \textit{ pour tout } c \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Comme $\mathbf{C}$ est un cône convexe fermé pointé alors s'il existe $\mu \in]0,1[$ et $x, y \in \mathbf{C}$ tels que $\mu x + (1-\mu)y = 0$ alors $x = -\frac{(1-\mu)}{\mu} y$ donc $y \in \mathbf{C}$ et comme $\mathbf{C}$ est un cône $-y = \frac{\mu}{(1-\mu)} x \in \mathbf{C}$ d'où $y = 0$ et $x = 0$ par conséquent 0 est un point extrême de $\mathbf{C}$.

On va utiliser des techniques géométriques pour démontrer l'existence de la forme linéaire non nulle sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. On va, notament regarder des angles particuliers du cône. On ne s'intéressera qu'aux mesures principales des angles, on supposera donc qu'un angle, mesuré en radians, appartiendra à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On commence par regarder le cône dans $\mathbb{R}^2$.

Le cône $\mathbf{C}$ est engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, u et v. Comme 0 est extrême u et v ne sont pas opposés. Donc nécessairement, l'angle formé par les vecteurs u et v qu'on note $ang(u, v)$ appartient à $[0, \pi[$ (on peut considérer que cet angle est toujours positif sinon on interchange u et v).

On pose $\Delta = (\frac{1}{2}(u+v))^{\perp}$. Δ est donc un hyperplan dont l'intersection avec $\mathbf{C}$ est réduite à $\{0\}$.

On considère maintenant le cône $\mathbf{C}$ sur $\mathbb{R}^d$ où $d \geq 2$.

On pose $\mathbf{S} = S(0,1)$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cap \mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ est compact. Posons

$$\begin{array}{rccc} l & : & \mathbf{T} \times \mathbf{T} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & u, v & \rightarrow & \langle u, v\rangle \end{array}$$

l est continue sur un compact elle atteint son minimum sur $\mathbf{T}$. Soient u_0, v_0 les vecteurs de $\mathbf{T}$ qui réalisent le minimum. Nécessairement, u_0 et v_0 ne sont pas opposés car 0 est un point extrême de $\mathbf{C}$. Soit $\mathbf{P}$ le plan engendré par u_0 et v_0. $\mathbf{C}_0 = \mathbf{P} \cap \mathbf{C}$ est un cône qui a les mêmes caractéristiques que $\mathbf{C}$ car c'est la "trace" du cône $\mathbf{C}$ sur le plan $\mathbf{P}$. On se ramène au cas où $d = 2$. On prend la même droite Δ.

Vérifions que $\Delta \cap \mathbf{C} = \{0\}$.

Soit $m \in \Delta \cap \mathbf{C}$, $m \neq 0$ et $\|m\| = 1$.

Si $ang(u_0, v_0) = 0$ le cône $\mathbf{C}_0$ est une demi-droite donc un vecteur m non nul ne peut pas appartenir à une demi-droite et sa perpendiculaire donc $m = 0$.

Soit $ang(u_0, v_0) \neq 0$, comme $m \in \Delta$,

Tout d'abord, $ang(m, u_0) < \pi$ et $ang(m, v_0) < \pi$ et de même signe sinon il existerait deux vecteurs opposés dans $\mathbf{C}$. On suppose que les deux angles sont positifs. Comme $ang(u_0, v_0) \neq 0$ alors les deux angles sont mêmes strictement positifs. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \sup\{ang(m,u_0), ang(m,v_0)\} & = & \\ \inf\{ang(m,u_0), ang(m,v_0)\} + ang(u_0,v_0) & > & ang(u_0,v_0) \end{array}$$

Par conséquent comme, $\cos :]0, \pi[\to]-1, 1[$ est strictement décroissante alors

$$\inf\{\langle m, u_0\rangle, \langle m, v_0\rangle\} < \langle u_0, v_0\rangle$$

ce qui contredit la minimalité de $\langle u_0, v_0\rangle$, m appartenant à $\mathbf{T}$.

On conclut que $m = 0$.

On a donc construit une droite perpendiculaire à la bissectrice de l'angle le plus grand si on considére toutes les traces de $\mathbf{C}$.

Maintenant, soit $\mathbf{V}$ un sous espace vectoriel de dimension maximale tel que $\mathbf{V} \cap \mathbf{C} = \{0\}$, on sait que $dim\mathbf{V} \geq 1$.

$\mathbf{V}$ admet un supplémentaire $\mathbf{W}$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^d$, s'écrit de manière unique $v + w$ avec $v \in \mathbf{V}$ et $w \in \mathbf{W}$ on écrit $x = (v, w)$. On pose alors

$$\begin{array}{rccc} pr & : & \mathbb{R}^d & \to & \mathbf{W} \\ & & (v,w) & \to & w \end{array}$$

$\mathbf{W}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{d-q}$, où q est la dimension de $\mathbf{V}$. L'application pr est la projection sur $\mathbf{W}$ de x.

L'application pr est linéaire, $\ker(pr) = V$ et pr est surjective. Comme $\mathbf{C} \cap \mathbf{V} = \{0\}$, on déduit que $\mathbf{C} \subset \mathbf{W}$. Par linéarité de pr, $pr(\mathbf{C})$ est un cône convexe fermé. S'il existe $x, y \in \mathbf{C}$ tel que $pr(x) + pr(y) = 0$ alors $pr(x + y) = 0$ donc $x + y \in \mathbf{V}$ et $x + y \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ est cône convexe). Donc $x + y = 0$, par hypothèse, et comme 0 est extrêmal dans $\mathbf{C}$, $x = y = 0$ d'où $pr(x) = pr(y) = 0$.

Si $\mathbf{V}$ est un hyperplan, c'est fini on a trouvé une forme linéaire non nulle pour tout $c \in \mathbf{C}$, c non nul.

Sinon $d > dim\ \mathbf{W} \geq 2$. Ceci implique que $pr(\mathbf{C})$ est un cône dans un sous-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2.

On peut donc trouver une droite Δ, telle que $\Delta \cap pr(\mathbf{C}) = \{0\}$. En outre,

$$pr^{-1}[(\Delta) \cap pr(\mathbf{C})] = pr^{-1}(\Delta) \cap pr^{-1}(pr(\mathbf{C})) \supset \mathbf{C} \cap pr^{-1}(\Delta) \tag{B.1}$$

comme $\Delta \cap pr(\mathbf{C}) = \{0\}$,

$$pr^{-1}(\Delta) \cap pr^{-1}(pr(\mathbf{C})) \subset \ker(pr) = \mathbf{V} \tag{B.2}$$

et tout vecteur non nul de $pr^{-1}(\Delta) \cap pr^{-1}(pr(\mathbf{C}))$ s'écrit $v + w$ avec w non nul. (car $pr(\mathbf{C}) \neq \{0\}$ et $\Delta \neq \{0\}$), par conséquent grâce à (B.2),

$$pr^{-1}(\Delta) \cap pr^{-1}(pr(\mathbf{C})) = \{0\}.$$

A partir de (B.1), on en déduit que

$$pr^{-1}(\Delta) \cap \mathbf{C} = \{0\}.$$

Comme $\Delta \neq \{0\}$, $pr^{-1}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel qui contient strictement $\mathbf{V}$ et qui contient au moins un vecteur non nul de $\mathbf{W}$, il est donc de dimension strictement plus grande que celle de $\mathbf{V}$ ce qui contredit la maximalité de la dimension de $\mathbf{V}$.

En conclusion, $\mathbf{V}$ est un hyperplan tel que $\mathbf{V} \cap \mathbf{C} = \{0\}$. Il existe donc une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. On la notera ψ.

□

Remarque: On suppose qu'il existe $x_0, x_1 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tels que $\psi(x_1) < 0$ et $\psi(x_0) > 0$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\psi(x_1) = -\lambda\psi(x_0) < 0$, ce qui implique $\psi(x_1 + \lambda x_0) = 0$. Or $\mathbf{C}$ est un cône convexe donc $x_1 + \lambda x_0 \in \mathbf{C}$, par conséquent $x_1 + \lambda x_0 = 0$ et $\mathbf{C}$ est pointé d'où $x_1 = \lambda x_0 = 0$ contradiction. ψ a un signe constant sur $\mathbf{C}$. Si la forme linéaire ψ trouvée est strictement négative sur $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, on prend son opposée. On aura toujours un point $x_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tel que $\psi(x_0) = 1$.

On démontre maintenant le lemme 4.1.2 :

Lemme B.0.2. *Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, f est semidifférentiable si et seulement si pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, f_i est semidifférentiable et la semidifférentielle de f en u est le vecteur des semidifférentielles des f_i.*

Démonstration. Supposons f semidifférentiable en u pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|h\| \leq \alpha \implies \left\| \frac{f(u+h) - f(u) - f'_u(h)}{\|h\|} \right\| \leq \epsilon$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\|h\| \leq \alpha \implies \left\| \frac{f_i(u+h) - f_i(u) - (f'_u(h))_i}{\|h\|} \right\| \leq \epsilon$ par ailleurs $(f'_u(h))_i$ est homogène et continue, par conséquent f_i est semidifférentiable pour tout i.

Réciproquement si pour tout i, f_i est semidifférentiable en u de semidifférentielle g_u^i, on obtient pour un ϵ fixé, pour tout i, il existe α_i tel que $\|h\| \leq \alpha_i$ $\implies \left\| \frac{f_i(u+h) - f_i(u) - g_u^i(h)}{\|h\|} \right\| \leq \epsilon$, en prenant $\bar{\alpha} = \min\{\alpha_1 \cdots \alpha_d\}$ on a pour tout i, $\|h\| \leq \bar{\alpha} \implies \left\| \frac{f_i(u+h) - f_i(u) - g_u^i(h)}{\|h\|} \right\| \leq \epsilon$ en prenant le sup sur $i \in [\![1, d]\!]$ on obtient que f est semidifférentiable et, comme les fonctions g_u^i sont homogènes et continues, pour semidifférentielle $f'_u = (g_u^1, \cdots, g_u^d)$. □

Ici, nous démontrons le lemme 4.2.1 dont la preuve a été laissée en suspens. Il s'agit d'un résultat élémentaire.

Lemme B.0.3. *h est affine par morceaux ssi pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, il existe un ensemble fini A, une famille d'ensembles finis $\{B_a\}_{a\in A}$ et une famille de fonctions affines $\{g_{a,b}\}_{a\in A, b\in B_a}$ vérifiant :*

$$h_j = \max_{a\in A} \min_{b\in B_a} g_{a,b}$$

Dans la suite, on posera $g_{a,b} = \langle m_{a,b}, \cdot\rangle + \ p_{a,b}$ où $m_{a,b}$ vecteur de $\mathbb{R}^d$ et $p_{a,b}$ appartient à $\mathbb{R}$.

Démonstration. On suppose que pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $h_j = \min_{a\in A} \max_{b\in B_a} g_{a,b}$, on peut prendre $g_{a,b}$ toutes distinctes, non réduit à une fonction sinon le découpage est trivial.

Première partie : Représentation du max

Comme A est fini et que pour tout $a \in A$, B_a est fini, on pose $A = \{1, \cdots, k, \cdots, m\}$ et pour tout $k \in \{1, \cdots, m\}$, $B_k = \{1, \cdots, \cdots, n_k\}$. Soit $j \in [\![1, d]\!]$. Soit $k \in \{1, \cdots, m\}$, on pose

$$F_k^l = \bigcap_{i=1}^{n_k} \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_{k,l}(x) \geq g_{k,i}(x)\}$$

Lemme B.0.4. *La familles $\{F_k^l\}_{1\leq l\leq n_k}$ ainsi construite vérifie le point (4.4) de la définition d'affine par morceaux.*

Démonstration. Fixons $k \in [\![1, m]\!]$.

Soit $l \in [\![1, n_k]\!]$.

Comme $g_{k,l}$ *et* $g_{k,i}$ sont affines alors

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid (g_{k,l} - g_{k,i})(x) \geq 0\}$$

est un convexe fermé. F_k^l est, donc, un convexe fermé en tant qu'intersection de convexes fermés. Comme pour un x fixé, il existe $g_{k,l}$ telle que $g_{k,l}(x) = \max_{t\in[\![1,n_k]\!]} g_{k,t}(x)$, alors $\{F_k^l\}_{1\leq l\leq n_k}$ recouvre $\mathbb{R}^d$.

On va montrer maintenant qu'en prenant $l \neq l'$,

$$int(F_k^l) \cap int(F_k^{l'}) = \emptyset. \tag{B.3}$$

.

Tout d'abord, remarquons que :

$$\tilde{F_k^l} = \bigcap_{i=1}^{n_k} \{x \in \mathbb{R}^d \mid (g_{k,l} - g_{k,i})(x) > 0\} \subset int(F_k^l), \tag{B.4}$$

Fixons $i \in [\![1, n_k]\!]$, notons

$$K_i = \{x \in F_k^l \mid (g_{k,l} - g_{k,i})(x) = 0\},$$

supposons qu'il existe $z \in K_i \cap int(F_k^l)$. Comme $z \in int(F_k^l)$, alors il existe $\beta > 0$ et y de norme 1 tel que, pour tout $|\epsilon| \leq \beta$, ϵ non nul, $z + \epsilon y \in F_k^l$.

Par ailleurs,

$$g_{k,l}(z + \epsilon y) - g_{k,i}(z + \epsilon y) = \epsilon(\sum_{q=1}^{q=d} m_{k,l}^{(q)} y_q - \sum_{q=1}^{q=d} m_{k,i}^{(q)} y_q) + g_{k,l}(z) - g_{k,i}(z) \geq 0 \tag{B.5}$$

$z \in K_i$ et (B.5) donnent

$$\textit{pour } \epsilon > 0, \ \epsilon(\sum_{q=1}^{q=d} m_{k,l}^{(q)} y_q - \sum_{q=1}^{q=d} m_{k,i}^{(q)} y_q) \geq 0 \tag{B.6}$$

et

$$\textit{pour } \epsilon < 0, \ \epsilon(\sum_{q=1}^{q=d} m_{k,l}^{(q)} y_q - \sum_{q=1}^{q=d} m_{k,i}^{(q)} y_q) \geq 0 \tag{B.7}$$

par conséquent, (B.6) et (B.7) impliquent

$$\langle L, y \rangle = \sum_{q=1}^{q=d} m_{k,l}^{(q)} y_q - \sum_{q=1}^{q=d} m_{k,i}^{(q)} y_q = 0 \textit{ pour tout } y \textit{ de norme } 1. \tag{B.8}$$

La forme linéaire L étant nulle sur la sphère unité, elle est nulle sur tout $\mathbb{R}^d$. Finalement comme $z \in K_i$, $p_{k,i} = p_{k,l}$ ce qui entraîne que $K_i = \mathbb{R}^d$ mais $g_{k,l} \neq g_{k,i}$.

En conclusion, $K_i \cap int(F_k^l) = \emptyset$, donc s'il existe $i \in [\![1, n_k]\!]$ tel que $x \in K_i \implies x \notin int(F_k^l)$ donc $int(F_k^l) = \tilde{F}_k^l$.

Supposons pour $l \neq l'$, $int(F_k^l) \neq \emptyset$ et $int(F_k^{l'}) \neq \emptyset$, sinon le résultat est évident.

Soit $x \in int(F_k^l) \cap int(F_k^{l'})$, on obtient :

$$g_{k,l}(x) > g_{k,l'}(x)$$

et

$$g_{k,l'}(x) > g_{k,l}(x)$$

ce qui est impossible et on obtient bien (B.3).

Par contre h_j n'est pas forcément affine sur cette famille. □

Deuxième partie : Représentation du min

Prenons deux familles $\{F_1^l\}_{1 \leq l \leq n_1}$ et $\{F_2^{l'}\}_{1 \leq l' \leq n_2}$ construites plus haut.

Pour tout $(l, l') \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_2]\!]$ tel que $F_1^l \cap F_2^{l'} \neq \emptyset$, on pose :

$$H_{1,2}^{l,l'} = \{x \in F_1^l \cap F_2^{l'} \mid g_{1,l}(x) \leq g_{2,l'}(x)\}$$

$$G_{1,2}^{l,l'} = \{x \in F_1^l \cap F_2^{l'} \mid g_{1,l}(x) \geq g_{2,l'}(x)\}$$

On appelera cette représentation, représentation du min.

Cette famille est composée de convexes fermés.

La famille $\mathcal{H} = \{H_{1,2}^{l,l'}, G_{1,2}^{l,l'}\}_{(l,l') \in [\![1,n_1]\!] \times [\![1,n_2]\!]}$ vérifie (4.4), en effet soit $(l, l') \neq (r, r')$, on sait que

$$int(H_{1,2}^{l,l'}) \cap int(H_{1,2}^{r,r'}) \subset [int(F_1^l) \cap int(F_2^{l'})] \cap [int(F_1^r) \cap int(F_2^{r'})] \tag{B.9}$$

(B.9) s'écrit aussi

$$int(H_{1,2}^{l,l'}) \cap int(H_{1,2}^{r,r'}) \subset [int(F_1^l) \cap int(F_1^r)] \cap [int(F_2^{l'}) \cap int(F_2^{r'})]$$

d'où

$$int(H_{1,2}^{l,l'}) \cap int(H_{1,2}^{r,r'}) = \emptyset.$$

Sinon, en reprenant la démonstration du lemme précédent, on obtient

$$int(H_{1,2}^{l,l'}) = \{x \in int(F_1^l \cap F_2^{l'}) \mid g_{1,l}(x) < g_{2,l'}(x)\} \tag{B.10}$$

$$int(G_{1,2}^{l,l'}) = \{x \in int(F_1^l \cap F_2^{l'}) \mid g_{1,l}(x) > g_{2,l'}(x)\}. \tag{B.11}$$

donc (B.10) et (B.11) donnent $int(H_{1,2}^{l,l'}) \cap int(G_{1,2}^{l,l'}) = \emptyset$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe l, l' tel que $x \in F_1^l \cap F_2^{l'}$, les familles $\{F_1^l\}_{1 \leq l \leq n_1}$ et $\{F_2^{l'}\}_{1 \leq l' \leq n_2}$ recouvrant $\mathbb{R}^d$, par conséquent, $x \in H_{1,2}^{l,l'}$ ou $x \in G_{1,2}^{l,l'}$ donc la famille $\mathcal{H}$ recouvre $\mathbb{R}^d$.

On construit une nouvelle famille à partir de la famille $\mathcal{H}$ et d'une troisième famille $\{F_3^s\}_{1 \leq s \leq n_3}$. Pour chaque $H_{1,2}^{l,l'}$ et chaque F_3^s dont l'intersection est non vide, on crée deux ensembles inclus dans l'intersection l'un considérant tous les points de l'intersection tels que $g_{1,l} \leq g_{3,s}$, et l'autre $g_{1,l} \geq g_{3,s}$. On fait de même avec $G_{1,2}^{l,l'}$ et les éléments de la famille $\{F_3^s\}_{1 \leq s \leq n_3}$.

En utilisant les mêmes techniques, on montre que la famille nouvellement créée satisfait (4.4). On continue cette méthode jusqu'à l'intersection des éléments de $\mathcal{H}^{m-3}$ avec les éléments de $\{F_m^l\}_{1 \leq l \leq n_m}$. Toujours en utilisant le même type de démonstration, on conclut que la famille finale créée vérifie (4.4)

L'égalité suivante :

$$\min\{\gamma_i,\ i \in I\} = \min\{\gamma_{i_1}, \min\{\gamma_i,\ i \in I,\ i \neq i_1\}\}\ avec\ I\ fini.$$

nous permet de conclure que sur chaque élément de la famille on prend bien la fonction affine qui réalise le $\min - \max$, par conséquent h_j est affine sur chaque élément de la famille créée.

Cependant la famille créée dépend de la coordonnée $j \in [\![1, d]\!]$. Pour avoir une famille qui ne dépend pas de j, il suffit, de prendre deux familles quelconques, considérer toutes les intersections non vides, on a un nouveau recouvrement puis on recrée un nouveau recouvrement à partir d'une troisième famille et ainsi de suite puisqu'on a d familles la méthode de decomposition s'arrête.

Ce recouvrement satisfait (4.4) et h est affiine sur chaque élément du recouvrement.

Une démonstration de la réciproque par S.Ovchinnikov, peut se trouver dans [Ovc02].

$\square$

Bibliographie

[AGN] M. Akian, S. Gaubert, and R.D. Nussbaum. Uniqueness of fixed point of nonexpansive semidifferentiable maps. *preprint*.

[Ber78] M. Berger. *Géométrie*, volume 3. Nathan, 1978.

[CC77] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation : a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. page 238—252. Conference Record of the Fourth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages, ACM Press, 1977.

[CC92] P. Cousot and R. Cousot. Abstract interpretation frameworks. *Journal of Logic and Computation*, 2(4) :511–547, August 1992.

[CGG+05] A. Costan, S. Gaubert, E. Goubault, M. Martel, and S. Putot. A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs. pages 462–475. Springer, July 2005.

[DR01] S. Delabriere and Y. Raynaud. Analyse convexe. *Cours de DEA OJME*, 2000-2001.

[GGTZ07] S. Gaubert, E. Goubault, A. Taly, and S. Zennou. Static analysis by policy iteration on relational domains. European Symposium on Programming (ESOP'07), Mars 2007.

[MPN02] J. Mallet-Paret and R.D. Nussbaum. Eigenvalues for a class of homogeneous cone maps arising from max-plus operators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8(3) :519–562, July 2002.

[Nus86] R.D. Nussbaum. Convexity and log convexity for spectral radius. *Linear Algebra And Its Applications*, pages 59–122, 1986.

[Ovc02] S. Ovchinnikov. Max-min representation of piecewise linear functions. *Contributions to Algebra and Geometry*, 43(1) :297–302, 2002.

[RW98] R.T. Rockafellar and R.J-.B Wets. *Variational Analysis*, chapter 7. Springer, 1998.