Méthode d'itération sur les politiques et minimalité d'invariant en interprétation abstraite de programmes

Assalé Adjé

24 septembre 2007

- *But de l'analyse statique de programme par interprétation abstraite : [CC77], [CC92]*
  - Trouver des propriétés vraies pour toutes entrées du programme appelées invariants du programme.
- *Ici :*
  - Recherche d'une surapproximation des valeurs prises par les variables du programme.
  - Les invariants sont assimilés à des points fixes de la fonctionnelle déduite des équations sémantiques du programme.
- *Outils :*
  - La méthode classique : Itération de Kleene
    - Garantit la minimalité du point fixe en théorie.
    - Algorithme nécessitant, dans certains cas, des techniques d'accélération.
    - Ces accélérations ne garantissent plus la minimalité du point fixe.
  - Nouvelle méthode : Itération Sur Les Politiques.
    - Rapide avec programmation linéaire (la complexité reste inconnue) [GGTZ07].
    - La minimalité n'est pas garantie : un seul théorème concernant la minimalité [CGG$^+$05].

Méthode d'itération sur les politiques

Definition

Soit $\mathcal{G}$ une famille d'applications sur un treillis $(\mathbf{X}, \prec)$. On pose $f = \inf\{g \mid g \in \mathcal{G}\}$. f a la propriété de sélection inférieure ssi

$$\forall\ x \in \mathbf{X},\ \exists\ g \in \mathcal{G} \text{ telle que } f(x) = g(x).$$

Les applications g sont appelées **politiques**.

FIG.: Algorithme Itération sur les Politiques

$k \leftarrow 1$; $g_1 \leftarrow$ *politique initiale*($\mathcal{G}$)
while true **do**
  $x_k \leftarrow (g_k^-)$
  if $x_k = f(x_k)$ **then**
    return x_k
  else
    find g such that $f(x_k) = g(x_k)$
    $k \leftarrow k + 1$; $g_k \leftarrow g$
  end if
end while

Méthode d'itération sur les politiques

Soient deux intervalles de $\bar{\mathbb{Z}}$, $I = [a; b]$ et $J = [c; d]$.

- $[a; b] + [c; d] = [a + c; b + d]$
- $[a; b] \times [c; d] = [e, f]$ où $e = \min\{a * c, a * d, b * c, b * d\}$ et $f = \max\{a * c, a * d, b * c, b * d\}$.
- $I \cup J = [\inf\{a, c\}, \sup\{b, d\}]$
- $I \cap J \in \{ll, lr, rl, rr\}$ où :

$$ll(I, J) = [a, b],\ rr(I, J) = [c, d],\ lr(I, J) = [a, d],\ rl(I, J) = [c, b]$$

Dans le treillis des intervalles, $\cap = \inf\{rr, ll, lr, rl\}$.
Les politiques pour $\cap$: rr, ll, lr, rl.
La politique initiale est choisie à partir de l'*heuristique classique*.

L'heuristique classique

(1)	On privilégiera une borne finie à une borne infinie.
(2)	On privilégiera une borne constante à une borne variable.
(3)	On privilégiera une borne variable à une borne infinie.

FIG.:

Definition

Soit **C** un cône de $\mathbb{R}^d$, pour une fonction g de **C** dans **C**, homogène et continue, on définit le rayon spectral $\rho_{\mathbf{C}}(g)$ de g de la manière suivante :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \exists\, x \in \mathbf{C} \backslash \{0\}, g(x) = \lambda x\}$$

Definition

Soit $\mathbf{C}$ un cône de $\mathbb{R}^d$, pour une fonction g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, homogène et continue, on définit le rayon spectral $\rho_{\mathbf{C}}(g)$ de g de la manière suivante :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \exists\, x \in \mathbf{C}\backslash\{0\}, g(x) = \lambda x\}$$

Definition

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, f est dite semidifférentiable au point u s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction g homogène continue tels que pour tout $h \in \mathcal{V}$:

$$f(u+h) = f(u) + g(h) + o(\|h\|)$$

Definition

Soit **C** un cône de $\mathbb{R}^d$, pour une fonction g de **C** dans **C**, homogène et continue, on définit le rayon spectral $\rho_{\mathbf{C}}(g)$ de g de la manière suivante :

$$\rho_{\mathbf{C}}(g) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid \exists\, x \in \mathbf{C}\backslash\{0\}, g(x) = \lambda x\}$$

Definition

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, f est dite semidifférentiable au point u s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction g homogène continue tels que pour tout $h \in \mathcal{V}$:

$$f(u+h) = f(u) + g(h) + o(\|h\|)$$

Exemple: $f(x) = \sup(x+3, 0)$. Au point $x = -3$, f n'est pas dérivable. Mais :

$$f(-3+t) = f(-3) + \sup(t, 0) + 0$$

La fonction $t \mapsto \sup(t, 0)$ est homogène et continue, f est semidifférentiable en -3 et la semidifférentielle de f en -3 est, par conséquent, $t \mapsto \sup(t, 0)$.

Definition

$h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est affine par morceaux ssi elle est continue pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, il existe un ensemble fini A, une famille d'ensembles finis $\{B_a\}_{a \in A}$ et une famille de fonctions affines $\{g_{a,b}\}_{a \in A, b \in B_a}$ vérifiant :

$$h_j = \min_{a \in A} \max_{b \in B_a} g_{a,b}$$

Definition

$h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est affine par morceaux ssi elle est continue pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, il existe un ensemble fini A, une famille d'ensembles finis $\{B_a\}_{a\in A}$ et une famille de fonctions affines $\{g_{a,b}\}_{a\in A, b\in B_a}$ vérifiant :

$$h_j = \min_{a\in A} \max_{b\in B_a} g_{a,b}$$

Lemme (Direction de descente)

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction affine par morceaux. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de u tel que pour tout $u + h \in \mathcal{V}$,

$$f(u + h) = f(u) + f'_u(h)$$

Definition

$h : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est affine par morceaux ssi elle est continue pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, il existe un ensemble fini A, une famille d'ensembles finis $\{B_a\}_{a \in A}$ et une famille de fonctions affines $\{g_{a,b}\}_{a \in A, b \in B_a}$ vérifiant :

$$h_j = \min_{a \in A} \max_{b \in B_a} g_{a,b}$$

Lemme (Direction de descente)

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction affine par morceaux. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de u tel que pour tout $u + h \in \mathcal{V}$,

$$f(u+h) = f(u) + f'_u(h)$$

Proposition (Semidifférentielle d'une fonction affine par morceaux)

Si f est affine par morceaux alors, f est semidifférentiable pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. De plus, on a pour tout $j \in [\![1, d]\!]$

$$(f'_u)_j = \min_{a \in \bar{A}} \max_{b \in \bar{B}_a} m_{a,b}$$

où $\bar{A} = \{a \in A \mid f_j(u) = \max_{b \in B_a} g_{a,b}\}$ et $\bar{B}_a = \{b \in B_a \mid f_j(u) = \min_{a \in A} g_{a,b}\}$

Definition

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, f est dite contractante au sens large si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

Definition

Soit $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, f est dite contractante au sens large si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

Théoréme (Théorème Fondamental)

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, croissante, affine par morceaux et contractante. Soit $u \in \boldsymbol{F}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *u est globalement minimal ;*
2. *f'_u n'a pas de point fixe non nul dans $\mathbb{R}^d$;*
3. *$\rho_{\mathbb{R}^d_-}(f'_u) < 1$.*

```
int x,int y,
x=[0,2];y=[10,15]   //1
while(x<=y){        //2
      x=x+1;        //3
     while(5<=y){   //4
           y=y-1;   //5
            }       //6
      }             //7
```

```
int x,int y,
x=[0,2];y=[10,15]   //1
while(x<=y){        //2
      x=x+1;        //3
     while(5<=y){   //4
           y=y-1;   //5
            }       //6
      }             //7
```

Pour le point de contrôle 2, on a le système (P_2) :

$$
\begin{aligned}
x_2^- &= x_1^- \vee x_6^- \\
x_2^+ &= (x_1^+ \vee x_6^+) \wedge \underline{(y_1^+ \vee y_6^+)} \\
y_2^- &= \underline{(x_1^- \vee x_6^-)} \wedge (y_1^- \vee y_6^-) \\
y_2^+ &= y_1^+ \vee y_6^+
\end{aligned}
$$

Application à l'interprétation abstraite

```
int x,int y,
x=[0,2];y=[10,15]    //1
while(x<=y){         //2
      x=x+1;         //3
     while(5<=y){    //4
           y=y-1;    //5
            }        //6
      }              //7
```

Pour le point de contrôle 2, on a le système (P_2) :

$$\begin{aligned}
x_2^- &= x_1^- \vee x_6^- \\
x_2^+ &= (x_1^+ \vee x_6^+) \wedge \underline{(y_1^+ \vee y_6^+)} \\
y_2^- &= \underline{(x_1^- \vee x_6^-)} \wedge (y_1^- \vee y_6^-) \\
y_2^+ &= y_1^+ \vee y_6^+
\end{aligned}$$

Au point de contrôle 4, le système (P_4)

$$\begin{aligned}
y_4^- &= (y_3^- \vee y_5^-) \wedge \underline{-5} \\
y_4^+ &= y_3^+ \vee y_5^+
\end{aligned}$$

On a, $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2 + 1$ et $x_4 = x_5 = x_6$. $x_3 = x_2 + 1 \implies -x_3^- = -x_2^- + 1$ et $x_3^+ = x_2^+ + 1$.

On a, $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2 + 1$ et $x_4 = x_5 = x_6$. $x_3 = x_2 + 1 \implies -x_3^- = -x_2^- + 1$ et $x_3^+ = x_2^+ + 1$. Au point de contrôle 6, le système (P_6)

$$\begin{array}{rcl} y_6^- & = & y_3^- \vee y_5^- \\ y_6^+ & = & (y_3^+ \vee y_5^+) \wedge \underline{4} \end{array}$$

On a, $x_4 = x_3$, $x_3 = x_2 + 1$ et $x_4 = x_5 = x_6$. $x_3 = x_2 + 1 \implies -x_3^- = -x_2^- + 1$ et $x_3^+ = x_2^+ + 1$. Au point de contrôle 6, le système (P_6)

$$\begin{array}{rcl} y_6^- & = & y_3^- \vee y_5^- \\ y_6^+ & = & (y_3^+ \vee y_5^+) \wedge \underline{4} \end{array}$$

On a, $y_5 = y_4 - 1 \implies -y_5^- = -y_4^- - 1$ et $y_5^+ = y_4^+ - 1$.
Et enfin, au point de contrôle 7, le système (P_7)

$$\begin{array}{rcl} x_7^- & = & (x_1^- \vee x_6^-) \wedge \underline{((y_1^- \vee y_6^-) - 1)} \\ x_7^+ & = & (x_1^+ \vee x_6^+) \\ y_7^- & = & (y_1^- \vee y_6^-) \\ y_7^+ & = & (y_1^+ \vee y_6^+) \wedge \underline{((x_1^+ \vee x_6^+) - 1)} \end{array}$$

Donc (P_2) donne :

$$\begin{aligned}
x_2^- &= 0 \vee (x_2^- - 1) = 0 \\
x_2^+ &= 15 \vee 4 = 15 \\
y_2^- &= 0 \vee -1 = 0 \\
y_2^+ &= 15 \vee 4 = 15
\end{aligned}$$

Donc (P_2) donne :

$$\begin{aligned}
x_2^- &= 0 \vee (x_2^- - 1) = 0 \\
x_2^+ &= 15 \vee 4 = 15 \\
y_2^- &= 0 \vee -1 = 0 \\
y_2^+ &= 15 \vee 4 = 15
\end{aligned}$$

(P_4) donne :

$$\begin{aligned}
y_4^- &= -5 \\
y_4^+ &= 15 \vee (y_4^+ - 1) = 15
\end{aligned}$$

Donc (P_2) donne :

$$\begin{aligned} x_2^- &= 0 \vee (x_2^- - 1) = 0 \\ x_2^+ &= 15 \vee 4 = 15 \\ y_2^- &= 0 \vee -1 = 0 \\ y_2^+ &= 15 \vee 4 = 15 \end{aligned}$$

(P_4) donne :

$$\begin{aligned} y_4^- &= -5 \\ y_4^+ &= 15 \vee (y_4^+ - 1) = 15 \end{aligned}$$

(P_6) donne :

$$\begin{aligned} y_6^- &= 0 \vee -4 = 0 \\ y_6^+ &= 4 \end{aligned}$$

Donc (P_2) donne :

$$\begin{array}{rcl} x_2^- &=& 0 \vee (x_2^- - 1) = 0 \\ x_2^+ &=& 15 \vee 4 = 15 \\ y_2^- &=& 0 \vee -1 = 0 \\ y_2^+ &=& 15 \vee 4 = 15 \end{array}$$

(P_4) donne :

$$\begin{array}{rcl} y_4^- &=& -5 \\ y_4^+ &=& 15 \vee (y_4^+ - 1) = 15 \end{array}$$

(P_6) donne :

$$\begin{array}{rcl} y_6^- &=& 0 \vee -4 = 0 \\ y_6^+ &=& 4 \end{array}$$

Enfin (P_7) donne :

$$\begin{array}{rcl} x_7^- &=& (-10 \vee 0) - 1 = -1 \\ x_7^+ &=& 2 \vee 16 = 16 \\ y_7^- &=& -10 \vee 0 = 0 \\ y_7^+ &=& (2 \vee 16) - 1 = 15 \end{array}$$

On note :

$$
\begin{aligned}
(\bar{x}, \bar{y}) &= (\bar{x}_2^-, \bar{x}_2^+, \bar{x}_7^-, \bar{x}_7^+, \bar{y}_2^-, \bar{y}_2^+, \bar{y}_4^-, \bar{y}_4^+, \bar{y}_6^-, \bar{y}_6^+, \bar{y}_7^-, \bar{y}_7^+)^\intercal \\
&= (0, 15, -1, 16, 0, 15, -5, 15, 0, 4, 0, 15)^\intercal
\end{aligned}
$$

On note :

$$\begin{array}{rcl}(\bar{x},\bar{y}) & = & (\bar{x}_2^-, \bar{x}_2^+, \bar{x}_7^-, \bar{x}_7^+, \bar{y}_2^-, \bar{y}_2^+, \bar{y}_4^-, \bar{y}_4^+, \bar{y}_6^-, \bar{y}_6^+, \bar{y}_7^-, \bar{y}_7^+)^\intercal \\ & = & (0, 15, -1, 16, 0, 15, -5, 15, 0, 4, 0, 15)^\intercal\end{array}$$

On pose :

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x_2^- \\ x_2^+ \\ x_7^- \\ x_7^+ \\ y_2^- \\ y_2^+ \\ y_4^- \\ y_4^+ \\ y_6^- \\ y_6^+ \\ y_7^- \\ y_7^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vee & (x_2^- - 1) \\ 2 \vee (x_2^+ + 1) & \wedge & 15 \vee y_6^+ \\ 0 \vee (x_2^- - 1) & \wedge & (-10 \vee y_6^-) - 1 \\ 0 & \vee & (x_2^+ + 1) \\ 0 \vee (x_2^- - 1) & \wedge & -10 \vee y_6^- \\ 15 & \vee & y_6^+ \\ y_2^- \vee (y_4^- + 1) & \wedge & -5 \\ y_2^+ & \vee & y_4^+ - 1 \\ y_2^- & \vee & y_4^- + 1 \\ y_2^+ \vee (y_4^+ - 1) & \wedge & 4 \\ -10 & \vee & y_6^- \\ 15 \vee y_6^+ & \wedge & (2 \vee (x_2^+ + 1)) - 1 \end{pmatrix}$$

F est clairement affine par morceaux, croissante et contractante. Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point fixe de F.

$$
F\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\underline{0} & \vee & (\bar{x}_2^- - 1) \\
2 \vee (\bar{x}_2^+ + 1) & \wedge & \underline{15} \vee \bar{y}_6^+ \\
0 \vee \underline{(\bar{x}_2^- - 1)} & \wedge & (-10 \vee \underline{\bar{y}_6^-}) - 1 \\
0 & \vee & \underline{(\bar{x}_2^+ + 1)} \\
\underline{0} \vee (\bar{x}_2^- - 1) & \wedge & -10 \vee \underline{\bar{y}_6^-} \\
\underline{15} & \vee & \bar{y}_6^+ \\
\bar{y}_2^- \vee (\bar{y}_4^- + 1) & \wedge & \underline{-5} \\
\underline{\bar{y}_2^+} & \vee & \bar{y}_4^+ - 1 \\
\underline{\bar{y}_2^-} & \vee & \bar{y}_4^- + 1 \\
\bar{y}_2^+ \vee (\bar{y}_4^+ - 1) & \wedge & \underline{4} \\
-10 & \vee & \underline{\bar{y}_6^-} \\
\underline{15} \vee \bar{y}_6^+ & \wedge & (2 \vee \underline{(\bar{x}_2^+ + 1)}) - 1
\end{pmatrix}
$$

$$F'_{(\bar{x},\bar{y})}\begin{pmatrix}\delta\bar{x}\\ \delta\bar{y}\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}\delta\bar{x}_2^-\\ \delta\bar{x}_2^+\\ \delta\bar{x}_7^-\\ \delta\bar{x}_7^+\\ \delta\bar{y}_2^-\\ \delta\bar{y}_2^+\\ \delta\bar{y}_4^-\\ \delta\bar{y}_4^+\\ \delta\bar{y}_6^-\\ \delta\bar{y}_6^+\\ \delta\bar{y}_7^-\\ \delta\bar{y}_7^+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ \delta\bar{x}_2^- & \wedge & \delta\bar{y}_6^- \\ & \delta\bar{x}_2^+ & \\ 0 & \wedge & \delta\bar{y}_6^- \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\bar{y}_2^+ & \\ & \delta\bar{y}_2^- & \\ & 0 & \\ & \delta\bar{y}_6^- & \\ 0 & \wedge & \delta\bar{x}_2^+ \end{pmatrix}$$

$F'_{(\bar{x},\bar{y})}$ admet un point fixe non nul dans $\mathbb{R}^{12}$, $h_t = (0, 0, t, 0, t, 0, 0, 0, t, 0, t, 0)^\intercal$ où $t < 0$.
D'après,lemme Direction de descente, il existe $t < 0$ tel que, $(\bar{x}, \bar{y}) + h_t$ est un point fixe de F.

$F'_{(\bar{x},\bar{y})}$ admet un point fixe non nul dans $\mathbb{R}^{12}$, $h_t = (0, 0, t, 0, t, 0, 0, 0, t, 0, t, 0)^\intercal$ où $t < 0$.
D'après,lemme Direction de descente, il existe $t < 0$ tel que, $(\bar{x}, \bar{y}) + h_t$ est un point fixe de F. Calculons $F((\bar{x}, \bar{y}) + h_t)$.

$$F((\bar{x},\bar{y}) + h_t) = F\begin{pmatrix} & 0 & \\ & 15 & \\ -1 & + & t \\ & 16 & \\ & t & \\ & 15 & \\ & -5 & \\ & 15 & \\ & t & \\ & 4 & \\ & t & \\ & 15 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 15 & \\ 0 & \wedge & (-10 \vee t) - 1 \\ & 16 & \\ 0 & \wedge & -10 \vee t \\ & 15 & \\ t \vee -4 & \wedge & -5 \\ & 15 & \\ t & \vee & -4 \\ & 4 & \\ -10 & \vee & t \\ & 15 & \end{pmatrix}$$

La contrainte sur t la plus forte est $t \geq -4$ pour que $(\bar{x}, \bar{y}) + h_t$ reste un point fixe entier de F. On prend $t = -4$.
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 15, -5, 16, -4, 15, -5, 15, -4, 4, -5, 15)^\intercal$ est un point fixe.
La semidifférentielle en ce point est :

La contrainte sur t la plus forte est $t \geq -4$ pour que $(\bar{x}, \bar{y}) + h_t$ reste un point fixe entier de F. On prend $t = -4$.
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 15, -5, 16, -4, 15, -5, 15, -4, 4, -5, 15)^\intercal$ est un point fixe.
La semidifférentielle en ce point est :

$$F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}\begin{pmatrix} \delta\tilde{x} \\ \delta\tilde{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \delta\tilde{x}_2^- \\ \delta\tilde{x}_2^+ \\ \delta\tilde{x}_7^- \\ \delta\tilde{x}_7^+ \\ \delta\tilde{y}_2^- \\ \delta\tilde{y}_2^+ \\ \delta\tilde{y}_4^- \\ \delta\tilde{y}_4^+ \\ \delta\tilde{y}_6^- \\ \delta\tilde{y}_6^+ \\ \delta\tilde{y}_7^- \\ \delta\tilde{y}_7^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\tilde{y}_6^- & \\ & \delta\tilde{x}_2^+ & \\ & \delta\tilde{y}_6^- & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & \delta\tilde{y}_2^+ & \\ \delta\tilde{y}_2^- & \vee & \delta\tilde{y}_4^- \\ & 0 & \\ & \delta\tilde{y}_6^- & \\ 0 & \wedge & \delta\tilde{x}_2^+ \end{pmatrix}$$

La contrainte sur t la plus forte est $t \geq -4$ pour que $(\bar{x}, \bar{y}) + h_t$ reste un point fixe entier de F. On prend $t = -4$.
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 15, -5, 16, -4, 15, -5, 15, -4, 4, -5, 15)^\intercal$ est un point fixe.
La semidifférentielle en ce point est :

$$F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}\begin{pmatrix} \delta\tilde{x} \\ \delta\tilde{y} \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \delta\tilde{x}_2^- \\ \delta\tilde{x}_2^+ \\ \delta\tilde{x}_7^- \\ \delta\tilde{x}_7^+ \\ \delta\tilde{y}_2^- \\ \delta\tilde{y}_2^+ \\ \delta\tilde{y}_4^- \\ \delta\tilde{y}_4^+ \\ \delta\tilde{y}_6^- \\ \delta\tilde{y}_6^+ \\ \delta\tilde{y}_7^- \\ \delta\tilde{y}_7^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\tilde{y}_6^- \\ \delta\tilde{x}_2^+ \\ \delta\tilde{y}_6^- \\ 0 \\ 0 \\ \delta\tilde{y}_2^+ \\ \delta\tilde{y}_2^- \vee \delta\tilde{y}_4^- \\ 0 \\ \delta\tilde{y}_6^- \\ 0 \wedge \delta\tilde{x}_2^+ \end{pmatrix}$$

Pour que $(\delta\tilde{x}, \delta\tilde{y})$ soit un point fixe à coordonnées négatives de $F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}$, il faut que $\delta\tilde{y}_6^- = \delta\tilde{y}_2^- \vee 0$ mais $\delta\tilde{y}_6^- \leq 0$ donc $\delta\tilde{y}_6^- = 0$. Le seul point fixe négatif de $F'_{(\tilde{x},\tilde{y})}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}_-^{12}$.

- *Points forts :*
  - Méthode efficace.
  - Calcul de la semidifférentielle facile.
- *Points faibles :*
  - Difficilement implémentable.
  - Classe de programme limitée.
- *Travaux futurs :*
  - Utilisation du rayon spectral, plus facilement implémentable.
  - Trouver d'autres outils pour le cas points fixes infinis.
  - Affaiblir les hypothèses sur les fonctions.

P. Cousot and R. Cousot.
Abstract interpretation : a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints.
page 238—252. Conference Record of the Fourth Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages, ACM Press, 1977.

P. Cousot and R. Cousot.
Abstract interpretation frameworks.
Journal of Logic and Computation, 2(4) :511–547, August 1992.

A. Costan, S. Gaubert, E. Goubault, M. Martel, and S. Putot.
A policy iteration algorithm for computing fixed points in static analysis of programs.
pages 462–475. Springer, July 2005.

S. Gaubert, E. Goubault, A. Taly, and S. Zennou.
Static analysis by policy iteration on relational domains.
European Symposium on Programming (ESOP'07), Mars 2007.