

Programmation linéaire et convexité

TP4

31 mars 2010

Dans cette séance on s'intéressera à l'application de la méthode du simplexe aux problèmes de deuxième espèce. Pour cette famille plus générale de problèmes, cette dernière se décline en deux *phases*. La première correspond à l'identification d'une éventuelle solution de base réalisable, moins aisée que dans le cadre des problèmes de première espèce. La seconde consiste en une application classique de la méthode du simplexe, à partir d'une solution de base réalisable. À chaque phase est possiblement associé un certain nombre de situations pathologiques : convexe des contraintes vide pour la première étape ; existence d'une infinité de solutions ou convexe des contraintes non borné pour la seconde.

1 Résolution pas à pas d'un problème de deuxième espèce

Exercice 1 On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3,$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & 180 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq & 30 \\ 35x_1 & + & 56x_2 & + & 40x_3 & \leq & 1400 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & \leq & 140 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. & & \end{array} \right. \quad (1)$$

1. Reformulation du problème

- Mettre ce problème sous sa forme matricielle standard $AX = d$ en introduisant les variables d'écart e_1, e_3, e_4, e_5 et de faux écart f_2 . L'index *des variables* correspond à la ligne du système des contraintes associé.
- Pourquoi ne dispose-t-on pas d'une solution de base réalisable ?
- Introduire, comme dans le cours, une variable supplémentaire $\alpha_2 \geq 0$ et une fonctionnelle $U = \alpha_2$. Écrire la nouvelle formulation du système des contraintes intégrant la variable α_2 .
- À quelle condition portant sur U peut-on trouver une solution de base réalisable ?
- Écrire le tableau final correspondant à cette dernière reformulation du problème.

2. Construction sous `scilab` du tableau associé au problème (1)

- Définir les vecteurs $v = (5, 8, 4, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^8$, $u = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^8$ et $\alpha = (0, 1, 0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^5$.
- Construire la matrice $M \in \mathcal{M}_{7,10}(\mathbb{R})$ définie par bloc de la manière suivante

$$M = \begin{pmatrix} A & \alpha & d \\ u & -1 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_5 \\ L_U \\ L_Z \end{pmatrix},$$

puis mettre à jour L_U (faire en sorte que cette ligne contienne les coûts marginaux des variables hors-base pour la fonctionnelle $-U$).

3. Recherche d'une solution de base réalisable
 - En utilisant la fonction PIVOTGJ, définie dans le TP2, appliquer à la matrice M les transformations de Gauss-Jordan successives dictées par l'algorithme du simplexe appliqué à la fonctionnelle $-U$.
 - Pourquoi U possède-t-elle un minimum ? Quel est-il ? Conclusion.
4. Recherche du maximum pour Z
 - Appliquer à la matrice N , obtenue à partir de M après la première phase, les transformations de Gauss-Jordan successives dictées par l'algorithme du simplexe appliqué à la fonctionnelle Z .
 - Conclusion.

2 Situations moins classiques

Exercice 2 On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 35 \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 51 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. Mettre ce problème sous forme matricielle standard incluant variables d'écart, de faux écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
2. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un minimum pour U .
3. En quel point ce minimum est-il atteint ? Quelle interprétation géométrique donner de ce résultat ?

Exercice 3 On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 20x_3,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 30 \\ 5x_2 - x_3 \geq 10 \\ 25x_1 - 10x_2 + 2x_3 \leq 105 \\ x_1 - 2x_2 + 20x_3 \leq 96 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

1. Donner une estimation *a priori* du maximum. Parmi les situations rencontrées lors du TP2, dans le cadre de la résolution graphique des problèmes d'optimisation linéaire en dimension 2, à laquelle peut-on ici s'attendre ? Sous quelle condition ?
2. Mettre ce problème sous forme matricielle standard incluant variables d'écart, de faux écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un maximum pour Z .
4. Quelle situation est ici illustrée ? Qu'en déduire de l'optimum ? Interprétation géométrique...

Exercice 4 On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{minimiser } Z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 15x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 90 \\ 15x_1 + 13x_2 + 15x_3 \geq 210 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

1. Le convexe des contraintes associé à ces inégalités est non borné, néanmoins le problème d'optimisation possède bien une solution. Pourquoi?
2. Mettre ce problème sous forme matricielle standard incluant variables d'écart, de faux écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un maximum pour $-Z$.

Programmation linéaire et convexité

TP4 Correction

31 mars 2010

1 Résolution pas à pas d'un problème de deuxième espèce

Exercice 1

1. Reformulation du problème
 - Formulation matricielle standard

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 56 & 40 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ 1400 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

et $X = (x_1, x_2, x_3, e_1, f_2, e_3, e_4, e_5)^T$.

- Pour la solution de base triviale, analogue de celle considérée dans le cadre des problèmes de première espèce, on a $f_2 = -30$. Or on doit avoir, par définition de la variable de faux écart, $f_2 \geq 0$.
 - On introduit la variable supplémentaire $\alpha_2 \geq 0$ et la fonctionnelle $U(\alpha_2) = \alpha_2$. Le principe de la méthode est le suivant : puisqu'on n'est pas capable de déterminer de manière simple une solution de base réalisable servant de point de départ à l'algorithme du simplexe, on plonge notre problème dans un espace de dimension supérieure (au sens du nombre d'inconnus du problème). On associe aux variables artificielles (ici α_2) les vecteurs de la base canonique manquants (ici ε_2). Ceci permet de trouver aisément une solution de base du nouveau problème (après adjonction des variables artificielles). **Mais cette solution de base réalisable ne l'est pas pour le problème d'origine.** On va se servir de cette solution comme point de départ d'une première application de la méthode du simplexe à la fonctionnelle $-U$.
 - Le résultat de cette procédure nous permettra de vérifier que la variable α_2 était bien artificielle; ceci se traduit par la condition $\max(-U) = 0$. Si cette condition n'est pas vérifiée, le système des contraintes initial définit un convexe des contraintes vide.
2. Voici le code scilab correspondant à une déclaration par bloc suggérée dans l'énoncé. Il reprend le formalisme de la correction du TP3, et peut servir de base à une définition plus générique.

```
tildeA=[6,4,3;3,3,1;35,56,40;0,7,2;0,1,2];
D=diag(ones(1,5));
D(2,2)=-1;
alpha2=[0;1;0;0;0];
A=[tildeA,D,alpha2];
d=[180,30,1400,140,40]';
Cz=[5,8,4,zeros(1,6)];
Cu=[zeros(1,7),0,1];
M=[A,d;-Cu,0;Cz,0]
```

Ce qui doit vous renvoyer le tableau suivant

M =

6.	4.	3.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	180.
3.	3.	1.	0.	-1.	0.	0.	0.	1.	30.
35.	56.	40.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	1400.
0.	7.	2.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	140.
0.	1.	2.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	40.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	0.
5.	8.	4.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

3. Recherche d'une solution de base réalisable

- Voici le code scilab correspondant aux questions 3 et 4 de l'énoncé.

```
// Mise à jour des couts marginaux
M($-1,:)=M($-1,:)+M(2,:)
```

```
//Premiere phase
M=PIVOTGJ(M,1,2)
```

```
//Deuxieme phase
M=PIVOTGJ(M,2,2)
M=PIVOTGJ(M,5,4)
M=PIVOTGJ(M,1,3)
M=PIVOTGJ(M,7,1)
```

- $\min(U) = 0$ donc le système des contraintes possède une solution. Ce minimum est atteint en $x_1 = 10, e_1 = 120, e_3 = 1050, e_4 = 140, e_5 = 40$ qui est donc la solution de base réalisable, qui va servir de point de départ au deuxième algorithme du simplexe.
- $\max(Z) = 200$ est atteint $x_1 = 65, x_2 = 10.714286, f_2 = 22.857143, e_4 = 70.714286, e_5 = 29.285714$. Le coût marginal associé à la variable e_1 est nul. On pourrait donc choisir un nouveau pivot sur cette colonne. Il n'y a pas unicité du maximum. On est sur une face (ou arête) du convexe des contraintes. Il y a donc une infinité de solutions.

2 Situations moins classiques

Les exercices 2,3 et 4 sont de simples applications de la méthode détaillée dans la première partie.

Exercice 2

1. Code scilab correspondant aux questions 1 et 2.

```
//Definition de la matrice
tildeA=[3,8,2;9,5,7;7,3,3];
D=diag(ones(1,3));
D(3,3)=-1;
alpha3=[0;0;1];
A=[tildeA,D,alpha3];
d=[40,35,51]';
Cz=[5,4,7,zeros(1,4)];
Cu=[zeros(1,6),1,];
M=[A,d;-Cu,0;Cz,0]
```

```
//Mise à jour des couts marginaux
M($-1,:)=M($-1,:)+M(3,:)
```

```
// Premiere phase
M=PIVOTGJ(M,1,2)
```

2. On constate que $\min(U) \neq 0$. Il n'y a donc pas de solution de base réalisable. Interprétation géométrique : convexe des contraintes vide.

Exercice 2bis Un système proche.

Si l'on change le sens de l'inégalité dans la deuxième contrainte, on traite le problème suivant

$$\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 35 \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 51 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. Le code scilab correspondant aux questions de l'exercice 2.

```
//Definition de la matrice
tildeA=[3,8,2;9,5,7;7,3,3];
D=diag(ones(1,3));
D(2,2)=-1;
D(3,3)=-1;
alpha2=[0;1;1];
alpha3=[0;0;1];
A=[tildeA,D,alpha2,alpha3];
d=[40,35,51]';
Cz=[5,4,7,zeros(1,5)];
Cu=[zeros(1,6),1,1];
M=[A,d;-Cu,0;Cz,0]

//Mise à jour des couts marginaux
M($-1,:)=M($-1,:)+M(2,:)+M(3,:)

// Premiere phase
M=PIVOTGJ(M,1,2)
M=PIVOTGJ(M,5,3)
M=PIVOTGJ(M,3,2)

//Deuxieme Phase
M=PIVOTGJ(M,6,1)
```

2. Le système des contraintes devient admissible et il y alors bien unicité du maximum.

Exercice 3

1. Il suffit de remarquer que la quatrième ligne du système des contraintes est $Z(x_1, x_2, x_3) \leq 96$. Donc nécessairement, $\max(Z) \leq 96$. Un des plans définissant le convexe des contraintes est parallèle aux lignes de niveau $Z = K$. On peut donc s'attendre à trouver plusieurs solutions de base optimales.
2. Code scilab correspondant.

```
//Definition de la matrice
tildeA=[10,5,-1;0,5,-1;25,-10,2;1,-2,20];
D=diag(ones(1,4));
D(1,1)=-1;
D(2,2)=-1;
alpha1=[1;zeros(3,1)];
alpha2=[0;1;0;0];
A=[tildeA,D,alpha1,alpha2];
d=[30,10,105,96]';
Cz=[1,-2,20,zeros(1,6)];
Cu=[zeros(1,7),1,1];
M=[A,d;-Cu,0;Cz,0]
```

```
//Mise à jour des couts marginaux
M($-1,:)=M($-1,:)+M(1,:)+M(2,:)

// Premiere phase
M=PIVOTGJ(M,1,1)
M=PIVOTGJ(M,2,2)

//Deuxieme Phase

//premiere solution de base optimale
M=PIVOTGJ(M,3,4)

//deuxieme solution de base optimale
M1=PIVOTGJ(M,5,1)

//troisieme solution de base optimale
M2=PIVOTGJ(M,4,3)
```

3. On trouve $\max(Z) = 96$ et la première solution de base optimale rencontrée est $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, e_3 = 75$.
4. Le coût marginal associé aux variables de faux écarts f_1, f_2 étant nul, on peut trouver d'autres solutions de base optimales, en choisissant le pivot sur une des deux colonnes associées à ces variables. Il y a en fait une infinité de solutions au problème initial, comme on pouvait s'y attendre.

Exercice 4

1. Le problème d'optimisation possède bien une solution, car il s'agit de **minimiser** une fonctionnelle dont tous les coûts sont positifs.
2. Code scilab

```
//Definition de la matrice
tildeA=[1,3,5;15,5,3;15,13,15];
D=diag(ones(1,3));
D(1,1)=-1;
D(2,2)=-1;
D(3,3)=-1;
alpha1=[1;zeros(2,1)];
alpha2=[0;1;0];
alpha3=[0;0;1];
A=[tildeA,D,alpha1,alpha2,alpha3];
d=[30,90,210]';
Cz=[-1,-2,-3,zeros(1,6)];
Cu=[zeros(1,6),ones(1,3)];
M=[A,d;-Cu,0;Cz,0]

//Mise à jour des couts marginaux
M($-1,:)=M($-1,:)+M(1,:)+M(2,:)+M(3,:)

//premiere phase
M=PIVOTGJ(M,1,2)
M=PIVOTGJ(M,3,1)
M=PIVOTGJ(M,4,3)

//deuxieme phase
M=PIVOTGJ(M,2,1)
```

```
M=PIVOTGJ(M,5,3)
```

```
M=PIVOTGJ(M,3,1)
```

3. On trouve $\min(Z) = 22$. La solution de base optimale est unique : $x_1 = 10, x_3 = 4, f_2 = 72$.
Vous pouvez utiliser le code fourni pour vérifier.