

Programmation linéaire et convexité

TP2

3 mars 2010

L'objectif de cette séance est double. Il s'agira dans un premier temps de revenir sur la méthode du pivot de Gauss Jordan et en particulier sur l'interprétation vectorielle de cette dernière. Dans le cadre de la résolution de problèmes d'optimisation linéaire, ce formalisme est en effet très utile. Dans un second temps la résolution graphique de problèmes d'optimisation linéaire en dimension 2 sera traitée. Cette méthode de résolution s'étend bien sûr difficilement aux problèmes posés en dimensions supérieures mais fournit néanmoins l'intuition géométrique des différentes situations rencontrées.

1 Pivot de Gauss Jordan, suite

On considère une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. La matrice A admet également la représentation suivante : $A = (V_1, \dots, V_n)$ où pour $1 \leq k \leq n$, V_k désigne les coordonnées du vecteur éponyme dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p\}$ de $\mathbb{R}^p$. Lorsqu'on a choisi a_{jm} pour pivot, la méthode de Gauss Jordan consiste en la série de transformations suivantes :

- si $i = j$, $L_i \leftarrow L_i / a_{im}$;
- si $i \neq j$, $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{im}}{a_{jm}} L_j$.

La matrice obtenue contient les coordonnées des $\{V_k\}_{1 \leq k \leq n}$ dans la base

$$\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, V_m, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_p\}$$

de $\mathbb{R}^p$ dite *base voisine* de $\mathcal{B}$.

Exercice 1 Interprétation vectorielle.

1. Ecrire une fonction scilab PIVOTGJ qui à une matrice A associe la matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ contenant les coordonnées des vecteurs V_k dans la base $\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}, V_m, \epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_p\}$ de $\mathbb{R}^p$. Cette fonction est de la forme :

```
function N= PIVOTGJ(M,m,j)
...
endfunction,
```

Il faut bien sûr s'assurer avant d'appliquer cette fonction que $\mathcal{B}'$ définit bien une nouvelle base de $\mathbb{R}^p$; ce qui n'a rien d'évident lorsqu'on considère une matrice quelconque $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.

2. Soit la matrice $A = (V_1, V_2, V_3, V_4)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer à l'aide de la fonction `rank` le rang de cette matrice.
- En utilisant la fonction PIVOTGJ, calculer la matrice B des coordonnées des $\{V_k\}_{1 \leq k \leq 4}$ dans la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_3\}$.
- Définir la matrice $P = (\epsilon_1, \epsilon_2, V_3) \in GL_3(\mathbb{R})$, matrice de passage de la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ vers la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_3\}$.

- Comparer A et $C = PB$. Conclusion.
- Pourquoi ne peut-on faire entrer V_2 ou V_4 dans la base à la place de e_3 ?

Exercice 2 Application à la recherche *algébrique* de solutions de base.

On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante.

$$\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 15x_2 + 25x_3,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + & & 5x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + & 3x_3 & \leq & 21 \\ x_1 + & x_2 + & 4x_3 & \leq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Questions de cours
 - De quel type de problème s'agit-il ?
 - En introduisant les variables d'écart e_1, e_2, e_3 , écrire la formulation standard du problème.
 - Donner une solution de base du système des contraintes. Est-elle réalisable ? Commentaires.
- Exploration des solutions de base
 - Écrire le problème obtenu après introduction des variables d'écart sous forme matricielle $AX = d$, où $A \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R})$ et $d \in \mathbb{R}^3$.
 - Définir sous scilab la matrice $M = (A, d^T)$. C'est à cette matrice que l'on va appliquer la méthode du pivot de Gauss Jordan.
 - La matrice M ainsi définie correspond au tableau ci-dessous. En utilisant la fonction

	V_1	V_2	V_3	e_1	e_2	e_3	d
e_1	2	0	5	1	0	0	5
e_2	2	2	3	0	1	0	21
e_3	1	1	4	0	0	1	10

TAB. 1 – Tableau associé au problème (1)

PIVOTGJ, définie dans l'exercice 1, calculer la décomposition des vecteurs $V_1, V_2, V_3, e_1, e_2, e_3$ dans les bases successives

$$\{V_3, e_2, e_3\}, \{V_3, e_2, V_2\}, \{V_3, e_3, V_2\}, \{V_3, V_1, V_2\}, \text{ et } \{e_2, V_1, V_2\},$$

qui sont *dans cet ordre* voisines l'une de l'autre.

- Quelles sont les solutions de base associées à chacune de ces bases. Lesquelles sont réalisables ?

2 Résolution géométrique en dimension 2

Lorsqu'on travaille en dimension 2 et que le nombre de contraintes est restreint, on peut aisément résoudre un problème de programmation linéaire à l'aide d'une représentation géométrique. En effet, à chaque contrainte *initiale* de type

$$(C_i) : a_i x + b_i y \leq (\geq) c_i,$$

on associe un sous ensemble de $(\mathbb{R}^+)^2$ défini par

$$C_i = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, y \leq (\geq) \frac{c_i}{b_i} - \frac{a_i}{b_i} x \right\}.$$

L'ensemble $C = \cap_i C_i$ est convexe. C'est l'ensemble des points pour lesquels toutes les contraintes *initiales* sont vérifiées. La compacité de C et le forme de Z décident alors de l'existence et la nature des solutions. Ces considérations s'appliquent à des problèmes de toute espèce. La faiblesse de cette

approche tient évidemment à ce que lorsque la dimension et le nombre de contraintes croissent, $\mathcal{C}$ n'est plus représentable.

Exercice 3 Premier exemple.

On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante.

$$\text{maximiser } Z_1(x, y) = 2x + y,$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ x + y \leq 5 \\ 9x + 4y \leq 36 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

1. De quelle espèce est le problème? Donner une solution de base réalisable.
2. A l'aide la fonction scilab `plot`, représenter le convexe $\mathcal{C}$ associé aux contraintes (2). Que peut-on en conclure quant à l'existence de solutions?
3. A l'aide de la représentation sous `scilab` des lignes de niveaux de la fonction de coût Z_1 , résoudre le problème.
4. Que se passe-t-il si l'on cherche à maximiser la fonction de coût $Z_2(x, y) = x + y$ sous les mêmes contraintes.
5. On suppose, plus généralement, que la fonction de coût $Z_a(x, y) = ax + y$ dépend d'un paramètre a . Décrire la solution du problème de programmation linéaire suivant les valeurs du paramètre de a .

Exercice 4 Différentes situations en dimension 2.

Résoudre graphiquement les problèmes de programmation linéaire suivants. Répondre dans chaque cas aux questions suivantes :

1. De quelle espèce est le problème?
2. Représenter à l'aide de `scilab` le convexe associé aux contraintes.
3. Existence et nature des solutions.

Problème 1.

$$\text{Maximiser } Z_1(x, y) = 3x + 2y,$$

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + 2y \leq 5 \\ x \geq 2 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Problème 2.

$$\text{Maximiser } Z_2(x, y) = 2x - 3y,$$

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 6 \\ x - y \geq 5 \\ 2x - y \geq 6 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Problème 3

$$\text{Maximiser } Z_3(x, y) = 30x + 20y,$$

$$\begin{cases} x - y \leq -2 \\ x - 4y \leq -2 \\ 2x + y \geq 5 \\ 5x + 7y \leq 44 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Exercice 5 Solutions de base réalisables et sommet du convexe $\mathcal{C}$.

On s'intéresse au problème (2) de l'exercice 3, pour la fonction de coût Z_1 .

1. Mettre le problème sous forme standard et introduire les variables d'écart e_1, e_2, e_3 .
2. Toujours en utilisant la fonction PIVOTGJ, parcourir *dans cet ordre* les bases voisines suivantes

$$\begin{aligned} & \{V_2, e_2, e_3\}, \{V_2, e_1, e_3\}, \{V_2, e_1, e_2\}, \{V_1, e_1, e_2\}, \{V_1, e_1, e_3\}, \\ & \{V_1, e_2, e_3\}, \{V_1, V_2, e_3\}, \{V_1, V_2, e_2\}, \{V_1, V_2, e_1\}. \end{aligned}$$

3. Relever les solutions de base réalisables.
4. Comparer avec les sommets du convexe des contraintes $\mathcal{C}$, tracé dans l'exercice 3. Conclusion ?

Programmation linéaire et convexité

TP2 correction

3 mars 2010

1 Pivot de Gauss Jordan, suite

Exercice 1 Interprétation vectorielle.

1. Code de la fonction PIVOTGJ

```
function N= PIVOTGJ(M,m,j)
    s=size(M);
    l=s(1);
    N=M;
    for k=1:l
        //test suivant la ligne
        if (k==j)
            N(k,:)=M(k,)/M(j,m);
        else
            N(k,:)=M(k,)-M(k,m)/M(j,m)*M(j,:);
        end
    end
endfunction
```

Cette fonction est proche d'une itération de la fonction PIVOT implémentée dans le TP1 exercice 5. Mais attention! Dans le TP1, la méthode implémentée est la méthode du pivot de Gauss tout court. Les lignes situées au dessus du pivot ne sont pas affectées par la transformation. Ici, c'est le cas et **c'est cela qui permet une interprétation vectorielle simple**.

2. – Définition de la matrice A de rang 3.
 $A=[3,4,-2,1;1,-1,0,1;-2,0,8,0]$
 $RANG=rank(A)$
– Application de la fonction PIVOTGJ et matrice de passage.
 $B=PIVOTGJ(A,3,3)$
 $P=[1,0,-2;0,1,0;0,0,8]$
 $C=P*B$
 Résultats identiques.
– Car $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_2\}$ et $\{\epsilon_1, \epsilon_2, V_4\}$ ne sont pas des bases!

Exercice 2 Application à la recherche *algébrique* de solutions de base.

1. Questions de cours
 - Toutes les inégalités sont dans le même sens. Il s'agit d'un problème de première espèce.
 - Formulation standard avec variable d'écart.

$$\begin{aligned} &\text{maximiser } Z(x_1, x_2, x_3) = 20x_1 + 15x_2 + 25x_3, \\ &\begin{cases} 2x_1 + & & 5x_3 & + e_1 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + & 3x_3 & + e_2 = 21 \\ x_1 + x_2 + & 4x_3 & + e_3 = 10 \end{cases} \\ &x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

- La solution triviale $e_1 = 5, e_2 = 21, e_3 = 3$ est une solution de base réalisable (avec variables hors base nulles). Elle l'est toujours pour un problème de première espèce lorsque $d \geq 0$. Mais bien souvent elle n'offre en pratique aucun intérêt.

2. Exploration des solutions de base

- Formulation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ et } X = (x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3)^T. \quad (2)$$

- Définition de la matrice $M = (A, d^T)$.

C1=[2,0,5;2,2,3;1,1,4];

C2=diag(ones(1,3));

A=[C1,C2]

d=[5;21;10]

M=[A,d]

- Il suffit d'appliquer la fonction PIVOTGJ.

M=PIVOTGJ(M,3,1)

M=PIVOTGJ(M,2,3)

M=PIVOTGJ(M,6,2)

M=PIVOTGJ(M,1,2)

M=PIVOTGJ(M,5,1)

Ce qui donne dans l'ordre :

- Base $\{V_3, e_2, e_3\}$. Solution de base réalisable $x_3 = 1, e_2 = 18, e_3 = 6$

M =

```

0.4    0.    1.    0.2    0.    0.    1.
0.8    2.    0. - 0.6    1.    0.   18.
- 0.6    1.    0. - 0.8    0.    1.    6.

```

- Base $\{V_3, e_2, V_2\}$. Solution de base réalisable $x_3 = 1, e_2 = 1, x_2 = 6$.

M =

```

0.4    0.    1.    0.2    0.    0.    1.
2.    0.    0.    1.    1. - 2.    6.
- 0.6    1.    0. - 0.8    0.    1.    6.

```

- Base $\{V_3, e_3, V_2\}$. Solution de base non réalisable. $x_3 = 1, e_3 = -3, x_2 = 9$

M =

```

0.4    0.    1.    0.2    0.    0.    1.
- 1.    0.    0. - 0.5 - 0.5    1. - 3.
0.4    1.    0. - 0.3    0.5    0.    9.

```

- Base $\{V_3, V_1, V_2\}$. Solution de base non réalisable $x_3 = -0.2, x_1 = 3, x_2 = 7.8$.

M =

```

0.    0.    1.    0. - 0.2    0.4 - 0.2
1.    0.    0.    0.5    0.5 - 1.    3.
0.    1.    0. - 0.5    0.3    0.4    7.8

```

- Base $\{e_2, V_1, V_2\}$. Solution de base réalisable $e_2 = 1, x_1 = 2.5, x_2 = 7.5$.

M =

```

0.    0. - 5.    0.    1. - 2.    1.
1.    0.    2.5    0.5    0.    0.    2.5
0.    1.    1.5 - 0.5    0.    1.    7.5

```

2 Résolution géométrique en dimension 2

Exercice 3 Premier exemple.

1. Il s'agit d'un problème de première espèce. Solution de base réalisable $e_1 = 8, e_2 = 5, e_3 = 36, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.
2. Sur la figure 1, les courbes suivantes ¹ sont représentées en bleu :

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 4 - \frac{1}{2}x, \\ (2) \quad y &= 5 - x, \\ (3) \quad y &= 9 - \frac{9}{4}x. \end{aligned}$$

Elles permettent de délimiter les zones C_1, C_2, C_3 et d'identifier le convexe des contraintes. Les commandes `scilab` associées sont :

```
// Definition des courbes (sous forme de vecteurs)
x=0:0.1:8;
y1=4-0.5*x;
y2=5-x;
y3=9-9*1.0/4*x;
// Affichage dans la fenetre graphique
plot(x,y1)
plot(x,y2)
plot(x,y3)
```

C étant convexe et compact, la fonction de coût possède bien un maximum, atteint sur un des sommets de C .

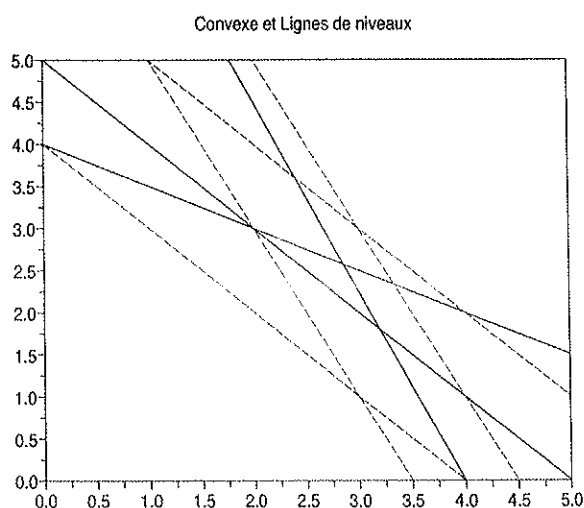


FIG. 1 – Convexe des contraintes C et lignes de niveaux des fonctions de coût Z_1 et Z_2

3. Toujours sur la figure 1, on a représenté en vert les lignes de niveaux $Z_1(x, y) = 7$ et $Z_2(x, y) = 9$. Les commandes `scilab` associées sont

¹Les commandes de mise en forme ne sont pas détaillées dans la suite. Ne pas s'étonner donc de ne pas trouver la même figure et ne pas hésiter à utiliser l'onglet `Figure` propriétés de la fenêtre graphique

```

yK1=7-2*x;
yK2=9-2*x;
plot(x,yK1,'g')
plot(x,yK2,'g')

```

Lorsqu'on augmente K les courbes de niveaux $Z_1(x, y) = K$ se décalent vers la droite de la figure. On conclut que le maximum est atteint au point $(3.2, 1.8)$ intersection des courbes bleues (2) et (3). En ce point $Z_1 = \max Z_1 = 8.2$.

4. Les courbes de niveaux $Z_2(x, y) = 7$ et $Z_2(x, y) = 9$ sont représentées en rouge sur la figure 1. Les commandes scilab correspondantes sont

```

zK1=4-x;
zK2=6-x;
plot(x,zK1,'r')
plot(x,zK2,'r')

```

Ici le maximum est atteint pour tous les points de la courbe (2) compris entre les points $(2, 3)$ et $(3.2, 1.8)$, intersections respectives des courbes (1),(2) et (2),(3). En tous ces points $Z_2 = \max Z_2 = 5$.

5. Puisque a décide de la pente des lignes de niveaux des fonctions de coût, c'est ce coefficient qui détermine pour un ensemble de contraintes fixé le point de C en lequel est atteint le maximum. Plus précisément :

- si $a < 0.5$ alors $\max Z = Z(0, 4.0) = 4.0$;
- si $a = 0.5$ alors $\max Z = Z(0, 4.0) = Z(t, 4 - \frac{1}{2}t) = 2.0a + 3.0 = 4.0$, où $0 \leq t \leq 2$;
- si $0.5 < a < 1$ alors $\max Z = Z(2.0, 3.0) = 2.0a + 3.0$;
- si $a = 1$ alors $\max Z = Z(2.0, 3.0) = Z(t, 5 - t) = 2.0a + 3.0 = 3.2a + 1.8$, où $2 \leq t \leq 3.2$;
- si $1 < a < \frac{9}{4}$ alors $\max Z = Z(3.2, 1.8) = 3.2a + 1.8$;
- si $a = \frac{9}{4}$ alors $\max Z = Z(3.2, 1.8) = Z(t, 9 - \frac{9}{4}t) = 3.2a + 1.8 = 4.0a$, où $3.2 \leq t \leq 4$;
- si $a > \frac{9}{4}$ alors $\max Z = Z(4.0, 0.0) = 4.0a$.

On peut reproduire la même analyse lorsque $Z_{a,b} = ax + by$, en s'intéressant à $\frac{a}{b}$.

Exercice 4 Différentes situations en dimension 2.

Utiliser les mêmes fonctions que dans l'exercice précédent pour résoudre graphiquement les problèmes. Le code couleur est identique : en bleu les courbes associées aux contraintes délimitent le convexe C des contraintes. En vert, sont représentées les lignes de niveaux.

1. **Problème 1** de deuxième espèce. Pour représenter C , on a utilisé la commande `scilab`

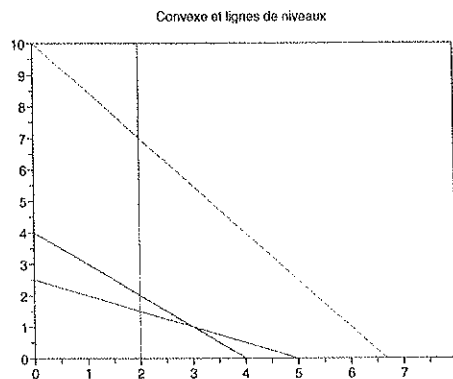


FIG. 2 – Problème 1 : convexe des contraintes C et lignes de niveaux des fonctions de coût.

permettant de définir une ligne verticale.


```
plot(2*ones(1,11),0:10)
```

Le problème n'a pas de solution car C n'est pas compact. On peut décaler la courbe de niveau à l'infini.

2. **Problème 2** de deuxième espèce. Le problème n'a pas de solution car le convexe des

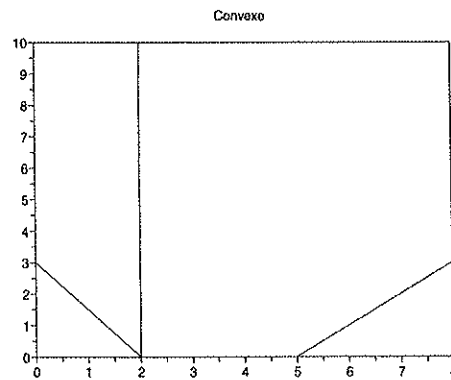


FIG. 3 – Problème 2 : convexe des contraintes C et lignes de niveaux des fonctions de coût.

contraintes est vide.

3. **Problème 3** de deuxième espèce. Le problème atteint son unique maximum au point $(6, 2)$. On a alors $Z(6.0, 2.0) = \max Z = 220$.

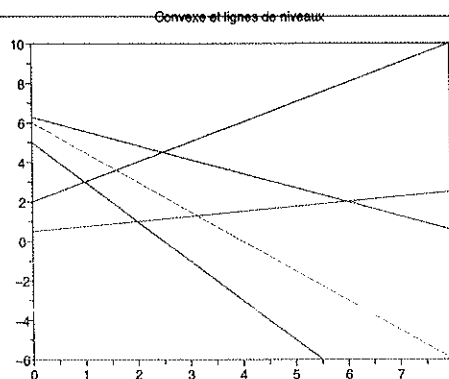


FIG. 4 – Problème 3 : convexe des contraintes C et lignes de niveaux des fonctions de coût.

Exercice 5 Solutions de base réalisables et sommet du convexe C .

On s'intéresse au problème de programmation linéaire de l'exercice 3, pour la fonction de coût Z_1 .

1. Commandes scilab

```
C1=diag(ones(1,3));
C2=[1,2;1,1;9,4];
d=[8;5;36];
M=[C2,C1,d]
```

2. Parcours des bases voisines à l'aide la fonction PIVOTGJ.

```
M=PIVOTGJ(M,2,1)
M=PIVOTGJ(M,3,2)
M=PIVOTGJ(M,4,3)
M=PIVOTGJ(M,1,1)
M=PIVOTGJ(M,5,3)
M=PIVOTGJ(M,4,2)
M=PIVOTGJ(M,2,2)
M=PIVOTGJ(M,4,3)
M=PIVOTGJ(M,3,3)
```

3. Les solutions de base correspondent aux points d'intersection des courbes des contraintes.
Les solutions réalisables correspondent aux sommets du convexe des contraintes $\mathcal{C}$.