TP 4

4 Avril 2012

Dans cette séance on s'intéressera à l'application de la méthode du simplexe aux problèmes de deuxième espèce. Pour cette famille plus générale de problèmes, cette dernière se décline en deux *phases*. La première correspond à l'identification d'une éventuelle solution de base réalisable, moins aisée que dans le cadre des problèmes de première espèce. La seconde consiste en une application classique de la méthode du simplexe, à partir d'une solution de base réalisable. A chaque phase est possiblement associé un certain nombre de situations pathologiques : convexe des contraintes vide pour la première étape ; existence d'une infinité de solutions ou convexe des contraintes non borné pour la seconde.

1 Résolution pas à pas d'un problème de deuxième espèce

Exercice 1 On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } Z(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 8x_2 + 4x_3,$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 6x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & 180 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq & 30 \\ 35x_1 & + & 56x_2 & + & 40x_3 & \leq & 1400 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & \leq & 140 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 40 \\ & & x_1,x_2,x_3 & \geq & 0. & & \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Reformulation du problème
   - Mettre ce problème sous forme matricielle standard $AX = d$ en introduisant les variables d'écart e_1, e_3, e_4, e_5 et de faux écart f_2. L'index des *variables* correspond à la ligne du système des contraintes associé.
   - Pourquoi ne dispose-t-on pas d'une solution de base réalisable ?
   - Introduire, comme dans le cours, une variable supplémentaire $\alpha_2 \geq 0$ et une fonctionnelle $U = \alpha_2$. Ecrire la nouvelle formulation du système des contraintes intégrant la variable α_2.
   - A quelle condition sur U peut-on trouver une solution de base réalisable ?
   - Ecrire le tableau final correspondant à cette dernière reformulation du problème.
2. Construction sous **scilab** du tableau associé au problème (1).
   - Définir le vecteur $v = (5,8,4,0,0,0,0,0) \in \mathbb{R}^8$, $u = (0,0,0,0,0,0,0,0) \in \mathbb{R}^8$ et $\alpha = (0,1,0,0,0)^T \in \mathbb{R}^5$.

– Construire la matrice $M \in \mathcal{M}_{7,10}(\mathbb{R})$ définie par bloc de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & \alpha & d \\ u & -1 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_5 \\ L_U \\ L_Z \end{pmatrix},$$

puis mettre à jour L_U (faire en sorte que cette ligne contienne les coûts marginaux des variables hors-base pour la fonctionnelle $-U$).

3. Recherche d'une solution de base réalisable.
   – En utilisant la fonction **PIVOTGJ**, définie dans le TP2, appliquer *à la matrice* M les transformations de Gauss-Jordan successives dictées par l'algorithme du simplexe *appliqué à la fonctionnelle* $-U$.
   – Pourquoi U possède-t-elle un minimum ? Quel est-il ? Conclusion.
4. Recherche du maximum pour Z
   – Appliquer *à la matrice* N obtenue à partir de M après la première phase, les transformations de Gauss-Jordan successives dictées par l'algorithme du simplexe *appliqué à la fonctionnelle* Z.
   – Conclusion.

2 Situations moins classqiues

Exercice 2 On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{Maximiser } Z(x_1,x_2,x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ 9x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 35 \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 51 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Mettre ce problème sous forme matricielle standard en introduisant les variables d'écart, de faux écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
2. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un minimum pour U.
3. En quel point ce minimum est-il atteint ? Quelle interprétation géométrique donner à ce résultat ?

Exercice 3 On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{Maximiser } Z(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 2x_2 + 20x_3,$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 30 \\ + 5x_2 - x_3 \geq 10 \\ 25x_1 - 10x_2 + 2x_3 \leq 105 \\ x_1 - 2x_2 + 20x_3 \leq 96 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Donner une estimation *a priori* du maximum. Parmi les situations rencontrées lors du TP2, dans le cadre de la résolution graphique des problèmes d'optimisation linéaire en dimension 2, à laquelle peut-on ici s'attendre ? Sous quelle condition ?
2. Mettre ce problème sous forme matricielle standard en introduisant les variables d'écart, de faux écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un minimum pour U.
4. Quelle situation est ici illustrée ? Qu'en déduire de l'optimum ? Interprétation géométrique ?

Exercice 4 On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\begin{array}{l} \textbf{Minimiser } Z(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \geq & 30 \\ 15x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & \geq & 90 \\ 15x_1 & + & 13x_2 & + & 15x_3 & \geq & 210 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 \geq & 0. & \end{array} \right. \end{array} \tag{4}$$

1. Le convexe des contraintes associé à ces inégalits est non borné, néanmoins le problème d'optimisation possède bien une solution. Pourquoi ?
2. Mettre ce problème sous forme matricielle standard en introduisant les variables d'écart, de faux écart et artificielles. Définir la fonctionnelle U comme dans l'exercice précédent.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe à la recherche d'un maximum pour $-Z$.