TP 3

14 Mars 2012

Dans cette séance on s'intéressera à l'application de la méthode du simplexe aux problèmes de première espèce. L'objectif de la première partie est d'appliquer cette méthode à des problèmes *simples* d'optimisation linéaire. On utilisera à cet effet de manière extensive la transformation de Gauss-Jordan. Dans une second epartie, on examinera des situations pour lesquelles l'algorithme du simplexe ne parvient pas nécessairement à résoudre de manière satisfaisante le problème initial. On verra en particulier que la modification des critères de sélection du pivot est susceptible d'améliorer, *dans certains cas*, la convergence de la méthode. Enfin le phénomène de cyclage est illustré qui pose également problème dans l'optique d'une implémentation *générique* de la méthode.

1 La méthode du simplexe dans des cas simples

Dans le TP2, il n'était pas encore question de la méthode du simplexe. On appliquait la transformation de Gauss-Jordan à une matrice intégrant uniquement les contraintes. Lorsqu'on ajoute à cette matrice une ligne associée à la fonction de coût, on obtient à chaque itération l'expression de celle-ci en fonction des variables hors-base. Il est dès lors possible d'identifier simplement le(s) sommet(s) du convexe des contraintes correspondant au maximum.

Exercice 1 Identification du maximum

On s'intéresse au problème de programmation linéaire de l'exercice 3 du TP2, dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{Maximiser } Z_1(x,y) = 2x + y, \\ \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & \leq & 8 \\ x & + & y & \leq & 5 \\ 9x & + & 4y & \leq & 36 \\ & & x,y & \geq & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

1. Reformulation du problème
   - Mettre ce problème sous forme standard $AX = d$ en introduisant les variables d'écart e_1, e_2, e_3.
   - En déduire une solution de base. Est-elle réalisable ?
2. Construction sous **scilab** de la matrice intégrant contraintes et fonction de coût.
   - Définir le vecteur $v = (2, 1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5$.

– Construire la matrice $M \in \mathcal{M}_{4,6}(\mathbb{R})$ définie par bloc de la manière suivante :

$$M = \begin{pmatrix} v & 0 \\ A & d \end{pmatrix}$$

– La matrice M ainsi définie contient donc dans les lignes d'indices $2 \leq i \leq 4$ la décomposition des vecteurs $(V_1, V_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$; **a pour première ligne les coûts associés aux variables hors-base**.

3. Recherche d'optimum à tâtons.
   – En utilisant la fonction **PIVOTGJ**, définie dans le TP2, appliquer *à la matrice M* les transformations de Gauss-Jordan qui donnent la décomposition des vecteurs $V_1, V_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ dans les bases successives :

$$\begin{gathered} \{V_2, \epsilon_2, \epsilon_3\},\ \{V_2, \epsilon_1, \epsilon_3\},\ \{V_2, \epsilon_1, \epsilon_2\} \\ \{V_1, \epsilon_1, \epsilon_2\},\ \{V_1, \epsilon_1, \epsilon_3\},\ \{V_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \\ \{V_1, V_2, \epsilon_3\},\ \{V_1, V_2, \epsilon_2\},\ \{V_1, V_2, \epsilon_1\}\ . \end{gathered}$$

   Il suffira d'identifier l'indice du pivot M_{jm} correspondant à cette transformation. *Pour la détermination de j, prendre garde au fait que l'on a ajouté une ligne.*
   – Après chaque transformation, donner une solution de base, préciser si elle est réalisable ou non, donner la valeur de Z associée.
   – Comparer avec les résultats de l'exercice 3 du TP2.
   – La manière de procéder vous semble-t-elle optimale ?

Ainsi, lorsqu'on parcourt au hasard les solutions de base, on finit par tomber (sauf cas particulier) sur l'*optimum* correspondant à un sommet du convexe des contraintes. Mais ce choix aléatoiree du pivot n'est pas satisfaisant. La méthode du simplexe repose sur deux critères de sélection. Le premier critère (**D1**) permet de choisir la **colonne** du pivot à partir des coûts marginaux des variables hors-base. Le second critère (**D2**) permet de choisir la **ligne** du pivot en tenant compte des contraintes de positivité.

Exercice 2 Méthode du simplexe : premières applications

On s'intéresse au problème de programmation linéaire dont la forme initiale est la suivante :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z) = 20x + 18y + 15z,$$
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & z & \leq & 6000 \\ x & + & 2y & + & 2z & \leq & 7000 \\ x & + & y & + & z & \leq & 4000 \\ & & & & x,y,z \geq & 0. & \end{array} \right. \tag{2}$$

1. Première itération
   – Définir la matrice M suivant le même principe que dans l'exercice 1.
   – A l'aide des critères (**D1**) et (**D2**) de Dantzig, déterminer les indices j et m du pivot préconisés par la méthode du simplexe, correspondant respectivement à la ligne et à la colonne du pivot.
   – Appliquer la fonction **PIVOTGJ** à la matrice M pour les indices j et m. En déduire une solution de base. Correspond-elle au maximum de Z ? Pourquoi ?
2. Itérations suivantes
   – Appliquer la fonction **PIVOTGJ** jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit satisfait.
   – Donner la valeur du maximum. Pour quelle(s) valeur(s) des variables x, y, z est-il atteint ? Combien d'itérations la procédure a-t-elle nécessité ?

3. Appliquer la méthode au simplexe au problème d'optimisation linéaire de première espèce suivant :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z) = 8x + 5y + 7z,$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & \leq & 30 \\ x & & & + & z & \leq & 40 \\ 2x & + & 3y & + & z & \leq & 100 \\ x & + & y & - & 2z & \leq & 60 \\ & & & & x,y,z \geq & & 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Combien d'itérations sont nécessaires pour atteindre le maximum ? Commentaires.

2 Variante et problèmes de la méthode du simplexe

2.1 Critère de sélection alternatif

Le problème d'optimisation linéaire (3) montre que les critères (**D1**) et (**D2**) peuvent impliquer un nombre relativement élevé d'itérations avant l'atteinte du maximum. Cela tient au fait que l'on examine séparément l'influence du coût marginal de la variable entrante et les contraintes de positivité associées. Il est possible de choisir simultanément la colonne m et la ligne j du pivot. On note $\mathcal{D}$ le critère associé, dont la définition est la suivante :

– Pour chaque variable hors-base x_s associée à un coût marginal positif $c_s > 0$, on définit :

$$\Delta_s = \underset{1\leq i\leq p}{\text{Min}} \left\{ \frac{d_i}{a_{is}} \mid a_{is} > 0 \right\} \text{ et } j_s = \text{argmin}\{\Delta_s\}$$

– On choisit de faire entrer dans la base le vecteur V_m tel que :

$$c_m \Delta_m = \text{Max}\{c_s \Delta_s\} \ .$$

Le pivot est alors le coeeficient $a_{j_m,m}$.

Exercice 3 Utilisation du critère $\mathcal{D}$

1. On considère à nouveau le problème de programmation linéaire (3) défini dans l'exercice 2.
   – Résoudre le problème à l'aide de **scilab** en utilisant le critère $\mathcal{D}$ pour sélectionner à chaque itération le pivot de Gauss-Jordan.
   – Combien d'itérations ont été nécessaires ? Comparer ce nombre avec celui obtenu dans l'exercice 2 (question 3). Conclusion.
2. On considère le problème de programmation linéaire :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z,t) = 20x + 17y + 5z + 6t,$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & \frac{1}{2}t & \leq & 4 \\ 2x & + & y & + & \frac{14}{5}z & - & 2t & \leq & 5 \\ 3x & + & 2y & + & z & & & \leq & 6 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & + & t & \leq & 7 \\ & & & & & & x,y,z,t & \geq & 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

   – Résoudre le problème à l'aide de **scilab** en utilisant les critères de Dantzig (**D1**) et (**D2**).
   – Résoudre le problème en utilisant $\mathcal{D}$.

– Comparer le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le maximum, pour chacune de deux méthodes.

Remarque 1 *Les exemples traités dans l'exercice précédent sont choisis pour illustrer la non-optimalité des critères (**D1**) et (**D2**) dans certaines situations. Mais attention ! Le critère $\mathcal{D}$ n'est pas le meilleur dans l'absolu. Il existe des situations où il conduit à un plus grand nombre d'itérations que les critères standards.*

3 Exemples de problèmes liés à la méthode du simplexe (I)

Exercice 4 Premier exemple de cyclage

On considère le problème de programmation linéaire :

$$\text{Maximiser } Z(x,y,z) = 110x + 110y + 110z,$$
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & \leq & 10 \\ 4x & + & y & + & 2z & \leq & 24 \\ 4x & + & 5y & + & 8z & \leq & 60 \\ 2x & + & y & + & 4z & \leq & 24 \\ & & & & x,y,z \geq & & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

1. Itérations classiques
   - Pourquoi ce problème possède-t-il au moins une solution ?
   - Effectuer sous **scilab** trois itérations standards de l'algorithme du simplexe. A l'issu de celles-ci, on constate que les coûts marginaux associés aux variables hors base x_3, e_2 sont nuls. Suivant le critère (**D1**), on peut donc faire entrer indifféremment V_3 ou ε_2 dans la base. On convient désormais que, lorsqu'une telle situation se présente, on choisit systématiquement de faire entrer dans la base le vecteur d'indice plus petit.
2. Cyclage
   - Poursuivre, en appliquant le principe précédent, l'algorithme du simplexe. Qu'observe-t-on ?
   - Pour éviter ce phénomène, on décide de s'affranchir du principe précédent (en choisissant par exemple le deuxième vecteur hors base rencontré comme vecteur entrant). Faire une ou deux itérations supplémentaites de la méthode du pivot.
   - Conclure.