

Devoir Maison

Suites et Nombres réels

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour x réel, on pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

1. Montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
2. Soient un réel x et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers x . Montrer que $d(x_n, A)$ converge vers $d(x, A)$.
3. On considère maintenant que A est un intervalle non vide fermé borné.
 - a. Montrer que si une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers x alors $x \in A$.
 - b. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
 - c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $z \in A$ tel que $d(x, A) = |x - z|$. Que vaut z ?
On utilisera le théorème de Bolzano-Weierstrass : Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.
4. Que peut-on dire si on considère un intervalle A fermé mais non borné?
5. Soient B et C deux intervalles fermés bornés non vides disjoints, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$, $y \in B$ et $z \in C$ tels que

$$|x - y| = d(x, B) = d(x, C) = |x - z|. \quad (1)$$

6. Pour x, y, z vérifiant (1), que peut-on dire des réels $w \in B \cup C$ qui vérifient $d(x, B \cup C) = |x - w|$?