UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE — Année 2009/2010
MIME 22 — LM115-Suites et Intégrales
Groupe 22.1

Devoir Maison

Nombres réels, Suites et Fonctions

Problème : Projection sur un rectangle

On appelle projeté d'un point $X = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ sur un rectangle, le point du rectangle qui minimise la distance entre le point X et le rectangle. Dans la suite du problème, on notera $P_C(X)$ le projeté de X sur le rectangle C.

On dit que la projection est orthogonale lorsque le segment $[P_C(X)X]$ coupe perpendiculairement l'un des cotés du rectangle.

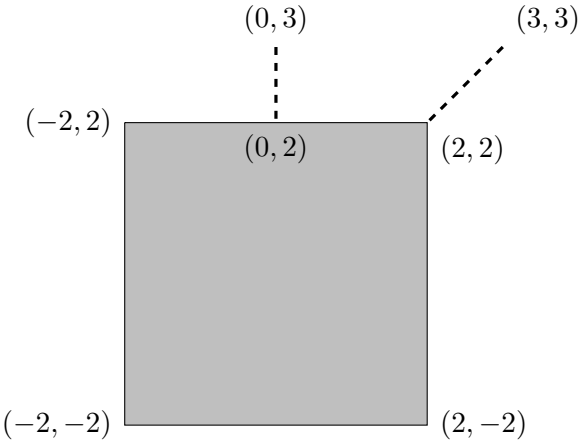
Dans ce problème, un rectangle sera le produit cartésien de deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$ et C est un rectangle s'il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $C = [a, b] \times [a', b']$.

Par exemple, $[-4, 4] \times [3, 4]$ est un rectangle et le point $(0, 3.5)$ appartient donc au rectangle $[-4, 4] \times [3, 4]$. Un rectangle sera donc formé des côtés et l'intérieur de celui-ci.

On se propose de montrer que le projeté existe pour tout point de $\mathbb{R}^2$, puis de calculer analytiquement le projeté d'un point de $\mathbb{R}^2$ sur un rectangle.

1 Un exemple

Soit le C rectangle $[-2, 2] \times [-2, 2]$.



Exercice 1 (Préliminaires)

1. Que peut-on dire de la projection de $(3, 3)$ sur C ?
2. Que peut-on dire de la projection de $(0, 3)$ sur C ?

3. Dans quels cas la projection sur C est-elle orthogonale ?
4. Dans quels cas la projection sur C n'est-elle pas orthogonale ?
5. Soit $X \in C$, quel est son projeté ?
6. Soit, maintenant, $X \notin C$, dites pourquoi $P_C(X)$ appartient à un côté de C.

2 Un peu d'analyse

Soient $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$. On appelle la distance entre X et X', la fonction $d : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$d(X, X') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Le but de cet exercice est de montrer que, pour X' fixé, la fonction $X \mapsto d(X, X')$ est minorée, c'est à dire que l'ensemble $\{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \mid x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}$ est minoré, et que, chercher les minima de $X \mapsto d(X, X')$ quand X' est fixé est équivalent à chercher les minima de deux fonctions réelles.

Soit $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ (il est fixé !). On pose :

$$\begin{array}{rl} \mathcal{A}_1(x') = & \{(x - x')^2 \mid x \in [a_1, b_1]\} \\ \mathcal{A}_2(y') = & \{(y - y')^2 \mid y \in [a_2, b_2]\} \\ \mathcal{A}(x', y') = & \{(x - x')^2 + (y - y')^2 \mid x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}. \end{array}$$

Exercice 2 (Réduction du problème)

1. Pourquoi la fonction $X \mapsto d(X, X')$ est-elle bien définie ?
2. On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite minorée si l'ensemble $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ est minoré.
   (a) Montrer que la fonction de $[a_1, b_1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto (x - x')^2$ est minorée.
   (b) Montrer que la fonction de $[a_2, b_2]$ dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto (y - y')^2$ est minorée.
   (c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')$ est minoré.
   (d) Montrer que :
   $$\inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y')) = \inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')).$$
   (e) Montrer que :
   $$\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y') = \mathcal{A}(x', y').$$
   En déduire que $\mathcal{A}(x', y')$ est minoré et que :
   $$\inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y')) = \inf(\mathcal{A}(x', y'))$$
   (f) Montrer que, s'il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 \leq (x - x')^2 + (y - y')^2, \ \forall\, x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2].$$
   On a, pour tout $x \in [a_1, b_1]$ et pour tout $y \in [a_2, b_2]$,
   $$\begin{array}{rl} & (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 \leq (x - x')^2 + (y - y')^2 \\ \iff & \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2} \leq \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \end{array}$$

Puis que (on rappelle que, $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$) :

$$\begin{aligned} & \inf(\{d(X, X') \mid x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}) \\ = \quad & \sqrt{\inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(A_2(y'))}. \end{aligned}$$

On conclut qu'il suffit de montrer que, les minima des fonctions $x \mapsto (x - x')^2$, $y \mapsto (y - y')^2$ sont atteints sur respectivement $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ dès que x' et y' sont fixés. On va maintenant montrer que le minimum de $x \mapsto (x - x')^2$ est atteint.

Exercice 3 (Existence)

1. Montrer que, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments appartenant $[a_1, b_1]$ converge vers u alors $u \in [a_1, b_1]$.
2. Montrer que $\inf(\mathcal{A}_1(x')) = 0 \iff x' \in [a_1, b_1]$.
3. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\inf(\mathcal{A}_1(x'))$.
4. On rappelle le théorème de Bolzano-Weierstrass : *Toute suite dans un intervalle fermé borné non vide admet une sous-suite convergente.*
   Montrer qu'il existe $x^\star \in [a_1, b_1]$, tel que, $(x^\star - x')^2 = \inf(\mathcal{A}_1(x'))$.
5. Par un raisonnement similaire, montrer qu'il existe, $y^\star \in [a_2, b_2]$ tel que, $(y^\star - y')^2 = \inf(\mathcal{A}_2(y'))$.

Exercice 4 (Unicité)

Supposons qu'il existe $x_1^\star \in [a_1, b_1]$ et $x_2^\star \in [a_1, b_1]$ tels que : $(x_1^\star - x')^2 = (x_2^\star - x')^2 = \inf(\mathcal{A}_1(x'))$.

1. Montrer que $\dfrac{x_1^\star + x_2^\star}{2} \in [a_1, b_1]$.
2. Soient a, b réels.
   (a) Montrer que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
   (b) Montrer que $(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2) \iff a = b$.
3. Appliquer la question précédente à $\dfrac{x_1^\star + x_2^\star}{2} - x'$ et déduire que $x_1^\star = x_2^\star$.

Exercice 5 (Continuité)

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pourquoi la fonction $z \mapsto z - x_0$ est-elle majorée sur $[a_1, b_1]$?
2. on pose $M = \sup\{|z - x_0| \mid z \in [a_1, b_1]\} + 1 > 0$. Montrer que, pour tout $z \in [a_1, b_1]$,

$$\inf(\mathcal{A}_1(x')) - (x_0 - x')^2 - 2M(x_0 - x') \leq (z - x_0)^2$$

3. En déduire que :

$$\inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0)) \leq (x_0 - x')^2 + 2M(x_0 - x')$$

4. Puis que, pour tout $\epsilon > 0$:

$$|x_0 - x'| \leq \min\{\frac{\epsilon}{4M}, \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\} \implies \inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0)) \leq \epsilon.$$

5. Par un raisonnement similaire, montrer que, pour tout $\epsilon > 0$:

$$|x_0 - x'| \leq \min\{\frac{\epsilon}{4M}, \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\} \implies \inf(\mathcal{A}_1(x_0)) - \inf(\mathcal{A}_1(x')) \leq \epsilon$$

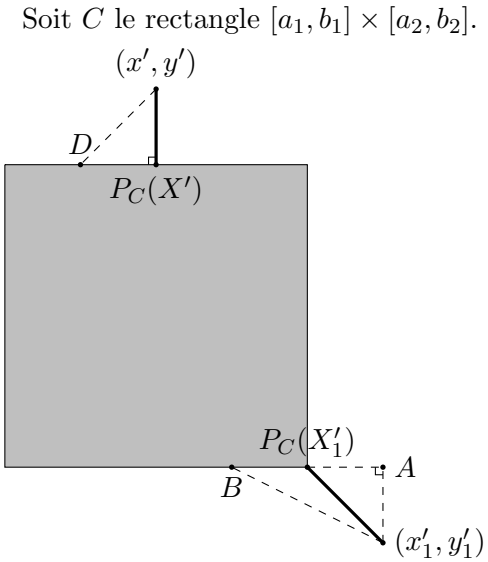
6. Conclure que :

$$|x_0 - x'| \leq \min\{\frac{\epsilon}{4M}, \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\} \implies \left|\inf(\mathcal{A}_1(x_0)) - \inf(\mathcal{A}_1(x'))\right| \leq \epsilon$$

Que peut-on conclure sur la fonction $x' \mapsto \inf(\mathcal{A}_1(x'))$?

3 Calculs

Revenons au problème initial. Nous savons que la projection d'un point $X' = (x', y')$ sur un rectangle existe. Nous proposons de la calculer. Sur le dessin, on voit qu'un célèbre théorème sera utile pour la démonstration.



Exercice 6 (Solutions)

1. On suppose que $x' \in [a_1, b_1]$. Montrer que, si $y' > b_2$ alors $P_C(X') = (x', b_2)$ et si $y' < a_2$, $P_C(X') = (x', a_2)$. Que vaut $P_C(X')$ si $y' \in [a_2, b_2]$?
2. On suppose que $y' \in [a_2, b_2]$. Montrer que, si $x' > b_1$ alors $P_C(X') = (b_1, y')$ et si $x' < a_1$, $P_C(X') = (a_1, y')$. Que vaut $P_C(X')$ si $x' \in [a_1, b_1]$?
3. Supposons que $x' > b_1$ et $y' > b_2$. Montrer que, $P_C(X') = (b_1, b_2)$.
4. Supposons que $x' < a_1$ et $y' > b_2$. Montrer que, $P_C(X') = (a_1, b_2)$.
5. Supposons que $x' < a_1$ et $y' < a_2$. Montrer que, $P_C(X') = (a_1, a_2)$.
6. Supposons que $x' > b_1$ et $y' < a_2$. Montrer que, $P_C(X') = (b_1, a_2)$.