UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupes 22.1 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Corrections

Devoir Maison et Feuille 3 Ex12

1 Devoir Maison

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in A$, $|x-a| = |x-y+y-a|$ et d'après l'inégalité triangulaire : $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$, or $d(x,A) \leq |x-a|$ car $a \in A$ d'où $d(x,A) \leq |x-y| + |y-a|$ puis $d(x,A) - |x-y| \leq |y-a|$ et par conséquent, $d(x,A) - |x-y|$ minore $\{|y-a|\,,\ a \in A\}$ et on conclut que $d(x,A) - |x-y| \leq d(y,A)$ et ainsi $d(x,A) - d(y,A) \leq |x-y|$. Par un raisonnement similaire, on déduit que $d(y,A) - d(x,A) \leq |x-y|$ et en conclusion $|d(y,A) - d(x,A)| \leq |x-y|$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - x| \leq \epsilon$, d'après 1., pour $n \geq n_0$, $|d(x_n, A) - d(x,A)| \leq |x_n - x| \leq \epsilon$, et on conclut que $d(x_n, A)$ converge vers $d(x,A)$.
3. a) A est un intervalle fermé borné non vide donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A = [a,b]$. Or $(x_n)_n \subset A$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, par passage à la limite on obtient que $a \leq x \leq b$...on peut aussi raisonner par l'absurde en supposant que $x \notin A$ ce qui équivaut à $x < a$ ou $x > b$, supposons sans perte de généralité que $x < a$ ainsi il existe $\epsilon > 0$ tel que $x + \epsilon < a$, or x_n converge vers x donc pour tout rang n plus grand que n_0, $x_n - x < \epsilon$ et $x + x_n - x < x + \epsilon < a$ ce qui implique $x_n < a$ ce qui est absurde puisque $a \leq x_n \leq b$, par conséquent $x \in [a,b]$.

   b) Soit $x \in A$, $0 \leq d(x,A) \leq |x-x| = 0$, ce qui entraine que $d(x,A) = 0$. Maintenant soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $d(x,A) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $0 = \inf_{a\in A} |x-a| \leq |x-a_n| \leq \inf_{a\in A} |x-a| + \dfrac{1}{n} \iff 0 \leq |x-a_n| \leq \dfrac{1}{n}$, on conclut que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, en utilisant 2., x appartient à A.

   c) .Existence Soit $x \in \mathbb{R}\backslash A$ et soit $n \geq 1$, il existe $z_n \in A$ tel que $d(x,A) \leq |x - z_n| \leq d(x,A) + \dfrac{1}{n}$, par conséquent en appliquant le théorème des gendarmes $|x - z_n|$ converge vers $d(x,A)$. Or $a \leq z_n \leq b$ donc z_n est une suite bornée, d'après le théorème de Bolzano Weierstrass, il existe $\psi : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $(z_{\psi(n)})_n$ converge vers $z \in A$ et finalement, par continuité de $y \mapsto |x-y|$, $\left|x - z_{\psi(n)}\right|$ converge vers $|x-z|$ et par unicité de la limite $|x-z| = d(x,A)$. Si $x \in A$, $d(x,A) = 0 = \inf_{a\in A} |x-a|$.

   .Unicité Soit $x \notin A$ et supposons qu'il existe $y, z \in A$ tels que $y \neq z$ et $|x-y| = |x-z| = d(x,A)$. On peut supposer $z > y$ (le cas $y > z$ se résout de la même manière). Comme $x \notin [y,z]$, sinon x appartiendrait à A, on peut supposer que $x < y$ (le cas $x > z$ se résoudra de la même manière). Si $y, z \in A$, comme A est un intervalle, $\dfrac{z+y}{2}$ appartient à A et donc $d(x,A) \leq \left|x - \dfrac{z+y}{2}\right| = \left|\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{z}{2} - \dfrac{y}{2}\right| \leq \dfrac{1}{2}|x-z| + \dfrac{1}{2}|x-y| = d(x,A)$ ce qui implique que $\left|x - \dfrac{z+y}{2}\right| = d(x,A)$. Or $x < y < \dfrac{y+z}{2}$ ce qui entraine que $\left|x - \dfrac{y+z}{2}\right| = |x-y| + \left|y - \dfrac{y+z}{2}\right|$ et donc que $d(x,A) = \left|x - \dfrac{y+z}{2}\right| > |x-y| = d(x,A)$, ce qui est absurde et donc $y = z$. Si $x \in A$, pour tout $A \ni a \neq x$, $|x-a| > 0 = d(x,A)$ et donc x est l'unique point z de A tel que $d(x,A) = |x-z|$. Si $x \notin A$, $x > b$ ou $x < a$ et donc si $x > b$, pour tout $y \in A$, $y \neq b$,

$|x-y| = |x-b| + |a-y|$ et $|x-y| > |x-b| = d(x,A)$ donc l'unique point $z \in A$ tel que $d(x,A) = |z-x|$ est la borne de A la plus proche de x, i.e b si $x > b$ et a si $x < a$.

4. Soit A un intervalle fermé non borné et non vide. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A =]-\infty, a]$ ou $A = [a, +\infty[$, Si $A =]-\infty, a]$, alors soit $x \in A$ et il existe $z = x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-z| = d(x,A)$. Sinon, $x \notin A$ et donc, $x > a$, et soit $z \in A$, $d(x,A) \leq |x-z|$ et il suffit de considérer $\tilde{A} = [z,a]$ et raisonner appliquer 3., à $\tilde{A}$. Le raisonnement est similaire si $A = [a, +\infty[$.
5. Soit B et C deux intervalles fermés bornés disjoints et non vides. On pose $B = [b_1, b_2]$ et $C = [c_1, c_2]$. Comme B et C sont disjoints, $b_2 < c_1$ ou $b_1 > c_2$. Supposons, $b_1 > c_2$, on pose $x = \dfrac{b_1 + c_2}{2}$, $x \notin B$ et $x \notin C$, donc d'après 3.c, $d(x,B) = |x - b_1| = \left|\dfrac{b_1+c_2}{2} - \dfrac{2b_1}{2}\right| = \left|\dfrac{c_2 - b_1}{2}\right| = \dfrac{b_1 - c_2}{2}$ et $d(x,C) = |x - c_2| = \left|\dfrac{b_1+c_2}{2} - \dfrac{2c_2}{2}\right| = \left|\dfrac{b_1 - c_2}{2}\right| = \dfrac{b_1 - c_2}{2}$. On conclut qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R} \times B \times C$ tel que $d(x,B) = |x-y| = |x-z| = d(x,C)$.
6. $\{w \in \mathbb{R} \mid d(x, B \cup C) = |x-w|\}$ est donc non réduit à un singleton.

2 Feuille 3 Ex 12

1. G est un groupe non réduit à 0 donc il existe $x \neq 0$ appartenant à G, si $x > 0$, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide (il contient x). Sinon $x < 0$ et comme G est un groupe, $-x \in G$ et $-x > 0$ donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Soit $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ et donc $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est minoré. Par conséquent, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide et minoré, il admet une borne inférieure.
2. Supposons que $\alpha > 0$, et supposons qu'il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < x < 2\alpha$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\alpha + \eta < x < 2\alpha$, or $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ et par conséquent, il existe $x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha < x_1 < \alpha + \eta < x < 2\alpha$. G est un groupe donc $-x_1 \in G$, et $x - x_1 \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ mais $0 < x - x_1 < \alpha$, ce qui contredit le fait que $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ donc si $\alpha \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, $x \geq 2\alpha$, mais $2\alpha > \alpha$ car $\alpha > 0$ et encore une fois α ne serait pas la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $\alpha \in G$. Comme $\alpha \in G$ et G est un groupe, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Soit $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha \leq g < (n+1)\alpha$. Si $g > n\alpha$, alors $g - n\alpha \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $g - n\alpha < (n+1)\alpha - n\alpha = \alpha$ ce qui est absurde puisque $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. On conclut que $g = n\alpha$, et par conséquent tout élément $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ s'écrit comme un multiple de α, pour les éléments de $h \in G \cap \mathbb{R}_-^*$, $-h \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $-h$ est un multiple de α. On conclut que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Supposons que $\alpha = 0$. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$, tels que $x < y$, comme $0 = \alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 \leq g \leq y - x$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n-1)g \leq x \leq ng$, ceci implique que $(n-1)g \leq x$ et donc que $ng \leq x + g \leq x + y - x = y$, d'où $x \leq ng \leq y$, et $ng \in G$. Si x, y sont de signes opposés alors $x \leq 0 \leq y$ et $0 \in G$. Et si x, y sont des réels négatifs on applique la prmière méthode à $-x$ et $-y$.
4. a. $0 \in G_\omega$, il suffit de prendre $a = b = 0$. Soient $x, x' \in G_\omega$, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$, tels que $x = a + b\omega$ et $x' = a' + b'\omega$, ainsi $x + x' = (a + a') + (b + b')\omega \in G_\omega$. Soient $x, y, z \in G_\omega$, il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$ et $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3$, $(x+y)+z = (a_1 + b_1\omega + a_2 + b_2\omega) + a_3 + b_3\omega = a_1 + b_1\omega + (a_2 + b_2\omega + a_3 + b_3\omega) = a_1 + b_1\omega + a_2 + b_2\omega + a_3 + b_3\omega$ donc G_ω est associatif. Si $x \in G_\omega$, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\omega$, on prend $y = -a + (-b)\omega \in G_\omega$, on a ainsi $x + y = y + x = 0$ donc tout élément admet un opposé.

   b. Soit $g \in G_\omega$, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $g = a + b\omega = a + b\dfrac{p}{q} = \dfrac{aq + b}{q} \in \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$. Il suffit de montrer que $\dfrac{1}{q} \in G_\omega$. Comme p et q sont premiers, d'après le théorème de Bezout, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aq + bp = 1$, et en divisant par $q \neq 0$, on obtient $a + b\omega = \dfrac{1}{q}$ et donc $\dfrac{1}{q} \in G_\omega$.

   Pour le lien avec les questions précédentes, si on calcule, la borne inférieure de $G_\omega \cap \mathbb{R}_+^*$, on cherche les entiers a, b tels que $a + b\dfrac{p}{q} > 0$ et $a + b\dfrac{p}{q}$ soit le plus petit possible ce qui revient à chercher $\dfrac{aq+bp}{q} > 0 \iff aq + bp > 0 \iff aq + bp \geq 1 \iff aq + bp = 1$, d'où pour a, b qui conviennent $a + bq = \dfrac{1}{q}$.

c. Supposons $\omega \notin \mathbb{Q}$. G_ω est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, G_ω est donc de la forme $\beta\mathbb{Z}$ avec $\beta \in \mathbb{R}^*$ ou G_ω est dense dans $\mathbb{R}$ (*cf* 2, 3). On suppose donc qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^*$ tel que $G_\omega = \beta\mathbb{Z}$. Donc, il existe $m, n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $0 + 1\omega = \beta m$ et $1 + 0\omega = \beta n$, ceci implique que $\beta = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{\omega}{m} = \beta$ et ainsi $\omega = \dfrac{m}{n}$ ce qui est absurde puisque $\omega \notin \mathbb{Q}$.
En conclusion, G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.