UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Feuille d'exercices 6

Intégration

1 Généralités

Exercice 1
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que :

$$f(a) = f(b) = 0,\ \exists\, M \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leq M$$

Montrer que :

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{4}$$

Exercice 2
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que, pour toute fonction g continue sur $[a, b]$ on a :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Montrer que f est nulle sur $[a, b]$. (*On pourra raisonner par l'absurde.*)

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = l$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = 0$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On définit h par $h(0) = 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

Montrer que si f est dérivable en 0 alors h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 5
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Trouver l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Exercice 6
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

1. Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ existe.
   (b) Montrer que l'application G est impaire.
   (c) Soit $x > 0$, montrer que $0 \leq G(x) \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$ En déduire que G tend vers 0 en $+\infty$.
3. On note F la primitive nulle en 0.
   (a) Expliciter G à l'aide de F. En déduire que G est dérivable sur $\mathbb{R}$, et expliciter G'.
   (b) Montrer qu'il existe une application D strictement positive telle que $G'(x) = \dfrac{3 - 12x^4}{D(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire les variations de G.

Exercice 7
Soit f une fonction continue et positive de $[a, b]$ bdans $\mathbb{R}$. On pose :

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n}.$$
2. Montrer que, pour tout $\epsilon \in]0, M[$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_a^b f(x)^n dx \geq (M - \epsilon)^n (2\eta).$$
3. En déduire que :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} = M.$$

Exercice 8
Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. **Dans cette question**, on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = cx^m$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

2. Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$$|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx - f(1)| \leq (n+1)\int_0^\alpha x^n |f(x)|dx + \alpha^{n+1}|f(1)| + (n+1)\int_\alpha^1 x^n |f(x)-f(1)|dx$$

3. En déduire que,

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

4. En s'inspirant de 2. et 3., montrer, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt = f(0).$$

Exercice 9
Pour tout $\alpha > 0$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_n = \sum_{1=n}^{k}\frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Montrer que, si $\alpha = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* * \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et continue. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx.$$

3. Montrer que, si $\alpha \leq 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
4. Montrer de même que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln k} = +\infty.$$

2 Calculs

Exercice 10
Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt.$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$.
2. Calculer $I_3(x)$.

Exercice 11
Calculer les intégrales suivantes :

1. $$\int_0^e \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx$$

2. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(\cos(t))^2}dt$$

3.
$$\int_0^3 \ln(1+t)dt$$

4.
$$\int_0^{\ln(2)} (2t+1)e^t dt$$

Exercice 12
Calculer les primitives suivantes des fonctions suivantes :

$$t :\mapsto \frac{1}{t(t+1)^2},\ t :\mapsto \frac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2},\ t :\mapsto \frac{1}{t^4+1}$$

Exercice 13
Calculer grâce à un changement de variable, les intégrales suivantes :

1.
$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+a^2}dt$$

2.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}}dt$$

3.
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

4.
$$\int_0^2 t\ln(1+t^2)dt$$

5.
$$\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t}dt$$

Exercice 14
Soit $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$. On se propose de calculer :

$$I = \int_0^{2\pi} \ln(1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2)dt$$

1. Montrer, en utilisant le fait que, $1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2 = (\alpha-\cos(t))^2+\sin^2(t)$, que $t :\mapsto \ln(1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2)$ est bien définie.
2. Montrer que
$$\prod_{k=1}^{n}(1-2\alpha\cos(\frac{2k\pi}{n})+\alpha^2) = (\alpha^n-1)^2$$
3. En utilisant les sommes de Riemann donner la valeur de I en fonction de α.

3 Limites d'intégrales

Exercice 15
Calculer :

1. $$\lim_{u\to 0}\int_u^{3u}\frac{\cos x}{x}dx.$$

2. $$\lim_{u\to +\infty}\int_0^{u} e^{-u^2}e^{t^2}dt.$$

Exercice 16
Calculer :

1. $$\lim_{n\to +\infty}\int_0^{1} x^n\ln(1+x^2)dx.$$

2. $$\lim_{n\to +\infty}\int_0^{1} \frac{x^n}{1+x}dx.$$

4 Sommes de Riemann

Exercice 17
Calculer :

1. $$\lim_{n\to +\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

2. $$\lim_{n\to +\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

3. $$\text{On suppose } f>0,\ f(1)=e,\ f(0)=1,\ \lim_{n\to +\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f'\left(\frac{k}{n}\right)}{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

4. $$\lim_{n\to +\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$