

Feuille d'exercices 3

Nombres réels

Exercice 1

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, montrer que $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$.

Exercice 3

Que peut-on dire d'un nombre réel x tel que :

1. $\forall \epsilon > 0, x \leq 4000\epsilon$
2. $\forall \epsilon > 0, -4\epsilon \leq x \leq \epsilon$
3. $\forall \epsilon > 0, -4 + \epsilon \leq x < \epsilon$

Exercice 4

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$, on se propose de montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

1. Effectuer la somme pour $x \in \mathbb{Z}$.
2. On va supposer, maintenant que x n'est pas entier mais que $x \in \mathbb{R}^+$.
 - (a) Montrer que le quotient de $E(nx)$ par n est $E(x)$.
 - (b) Selon les valeurs de $k \in \{0, \dots, n-1\}$, exprimer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ en fonction de $E(x)$.
 - (c) Conclure
3. Ecrire un raisonnement similaire pour x négatif non entier. (*Indication : Faire la division euclidienne de $E(-nx)$ et de n*)

Exercice 6

Déterminer si elles existent (le justifier) les bornes inférieures et supérieures des ensembles suivants : $A = [0, 1]$, $B =]0, 1[$, $C = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, $D = \{\sqrt{2n} - \sqrt{n+2}, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathbb{Q}_+^*$.

Exercice 7

1. Soit $\mathbf{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et soit M un nombre réel. Donner la définition quantifiée de : “ M est la borne supérieure de $\mathbf{A}$ ”.

2. Soient $\mathbf{A}_1 = \{x \in \mathbb{D}; \frac{5}{4} \leq x \leq \pi\}$ et $\mathbf{A}_2 = \{(-1)^n + \frac{10}{n}; n \geq 1\}$, où $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des nombres décimaux.

- Les ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont-ils majorés? Si oui, donner leurs bornes supérieures. Justifier la réponse.
- Les ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont-ils minorés? Si oui, donner leurs bornes inférieures. Justifier la réponse.

Exercice 8

1. Soient $\mathbf{A}_1 = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty]$ et $\mathbf{A}_2 = \{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \geq 1\}$.

- Les ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont-ils majorés? Si oui, donner leurs bornes supérieures. Justifier la réponse.
- Les ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont-ils minorés? Si oui, donner leurs bornes inférieures. Justifier la réponse.

Exercice 9

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A$ est l'unique réel m vérifiant :

$$\forall a \in A, a \leq m \text{ et } \forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \text{ tel que } m - \epsilon \leq a \leq m \quad (1)$$

Exercice 10

Soient A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$

- Montrer que $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.
- Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 11

Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ minoré.

On pose $-A = \{-a, a \in A\}$. Montrer que $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Exercice 12

Soit $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ une application croissante. Montrer qu'il existe $y \in [0, 1]$ tel que $f(y) = y$.

Exercice 13

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et telles que : $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$.

- Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent.
- Montrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
- Montrer l'équivalence $\sup(A) = \inf(B) \iff \forall \epsilon > 0, \exists x \in A \exists y \in B, |x - y| < \epsilon$.
- Donner un exemple d'ensembles A et B satisfaisant 3).

Exercice 14

Soit f une application qui vérifie :

- $f(1) = 1$, et
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$ puis pour tout $z \in \mathbb{Z}, f(z) = z$.
- Montrer que $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = q$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$, en déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.

Exercice 15

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $G \neq \{0\}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que si $\alpha > 0$, $\alpha \in G$ et $G = \alpha\mathbb{Z}$. *Indication : Montrer que pour $x \in G$ si $x > \alpha$ alors $x \geq 2\alpha$.*
3. Montrer que si $\alpha = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $G_\omega = \{a + b\omega, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.
 - a) Vérifier que G_ω est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
 - b) Si $\omega = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $G_\omega = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.
 - c) Si $\omega \notin \mathbb{Q}$ alors G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.