UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Feuille d'exercices 2

Un peu de théorie des ensembles

Exercice 1
Soient E, F et G des ensembles non vides.

1. Rappeler la définition du produit cartésien $E \times F$.
2. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 2
Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$. Donner les éléments des ensembles suivants :
a) $A \times B$ b) $(E \backslash A) \times B$ c) $A \times (E \backslash B)$ d) $(E \backslash A) \times (E \backslash B)$ e) $((E \times E) \backslash (A \times B))$.

Exercice 3
Donner une écriture simplifiée des ensembles suivants :
a. $A = [2, 5] \cap [3, 7]$.
b. $B = [-1, 2] \cap [0, 7]$.
c. $C = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$.
d. $D = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$.
e. $E = \mathbb{R}^+ \backslash [0, 3]$.
f. $F = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]-n, 0]$.
g. $G = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} [-\frac{1}{n}, n[$.

Exercice 4
On considère les ensembles $E = \{x \in [0, 1] \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1}\}$ et $F = \{x \in [0, 1] \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x < \frac{1}{n+1}\}$.
a) E a-t-il un, une infinité ou aucun élément ?
b) F a-t-il un, une infinité ou aucun élément ?

Exercice 5
$E = [2, 3]$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 10 < 0\}$
a) Démontrer que $E \subset F$.
b) Démontrer que $F =]-2, 5[$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie pour tout réel x par $f(x) = \sin x$. Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$, $f^{-1}(\{\pi\})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 7
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 2$ pour tout réel x.

1. Dresser un tableau des variations de f. Donner l'allure du graphe de f.
2. Expliciter $f(]-3,-2[)$, $f(]-\infty,-3[)$, $f([-2,-1])$, $f(]-1,+\infty[)$

Que peut-on dire des intervalles $[-2,-1]$ et $]-1,+\infty[$?

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Montrer que f est injective.

Exercice 9
Soient E, F et G des ensembles non vides, $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications. Montrer que :

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Exercice 10
Soit $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$, l'application définie par $g(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair et $g(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ sinon. Montrer que g est une bijection.

Exercice 11
Soit l'application $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \mapsto \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. Calculer f^{-1} la bijection réciproque de f.
3. Que vaut $f \circ f$?

Exercice 12
L'application $h : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{x}$ est-elle injective, surjective, bijective ? Justifiez.

Exercice 13
Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $(A \cup C) \subset (B \cup C)$.
2. Montrer que si $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ et $(A \cap C) \subset (B \cap C)$ alors $A \subset B$.

Exercice 14
Soient E et F des ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

1. Montrer que si A et B sont des parties de E telles que $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
2. Montrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. a) Montrer que $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   b) En utilisant l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$, montrer que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ n'est pas vraie pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
   c) Montrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ si et seulement si f est injective.

Exercice 15
Soient E et F des ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

1. Montrer que $\forall\, B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$

Exercice 16
Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x+y, 2x+3y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application f est bijective.

Exercice 17
Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, -4x + 6y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

a) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$ a t-il un, une infinité ou aucun élément ?
b) Montrer que l'application f n'est pas injective.
c) Posons $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = B$.

Exercice 18
Soit E un ensemble non vide. Pour tout $A \subset E$, on définit 1_A une application de E dans $\{0, 1\}$ telle que $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon ($x \notin A$). (L'application 1_A est appelée indicatrice de A)

1. Montrer que $1_A \leq 1_B \iff A \subset B$, que $1_A = 1_B \iff A = B$ et que $(1_A)^2 = 1_A$.
2. Exprimer $1_{A\cup B}$ et $1_{A\cap B}$ en fonction de 1_A et 1_B.

Exercice 19
Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p et $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans F.

1. On note $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. On définit $\phi : \mathcal{F} \mapsto F^n$ par, $\phi(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ pour $f \in \mathcal{F}$. Montrer que ϕ est une bijection en déduire que $card(\mathcal{F}) = p^n$.
2. On prend $F = \{0, 1\}$ et on définit $\psi : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathcal{F}$ par $\psi(A) = 1_A$ pour $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que ψ est une bijection et en déduire que $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Exercice 20
Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Démontrer que si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, alors f n'est pas surjective. Que peut-on en conclure sur E et $\mathcal{P}(E)$?

(Indication, on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.)