

Feuille d'exercices 1

Introduction au langage mathématique

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \implies (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
2. $(2 = 3) \implies (4 \text{ est un nombre pair})$.
3. $(2 = 3) \implies (3 = 4)$.
4. $(2 = 2) \implies (2 = 3)$.
5. $x \in]-\infty, -4[\implies x^2 + 3x - 4 > 0$.
6. $(x^2 + 3x - 4 > 0) \iff (x \in]-\infty, -4[)$.
7. Si n est un entier positif, alors n est impair ou $n(n+2)(n+3)$ est un multiple de 4.

Exercice 2

Soient les propositions, P : "J'ai mon permis de conduire" et Q : "J'ai plus de 18 ans". Les propositions $P \implies Q$ et $Q \implies P$ sont-elles vraies ? Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais :

- a) $\dots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
- b) $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$.
- c) $\dots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$.
- d) $\dots x \in \mathbb{N}, x \leq \pi$.
- e) $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = 0$.
- f) $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$.

Exercice 4

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$.
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$.
4. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \text{ ou } (x \leq 0)$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \text{ et } (x \leq 0)$.
7. $\exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 0) \text{ et } (x \leq 0)$.
8. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x = y^2$.

Exercice 5

On considère la proposition P suivante : P : “ Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x .”

1. Ecrire la proposition P avec des symboles mathématiques.
2. Ecrire la négation de P avec des quantificateurs puis en français.

Exercice 6

Ecrire la négation des propositions suivantes :

- a) $(x = 2)$ et $((x + y = 5)$ ou $(y \geq 3))$.
- b) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$.
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.
- d) $\exists k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |\sin(x) - \sin(y)| \leq k|x - y|$.
- e) Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 1 tel que $I \cap]1, 2[= \emptyset$.
- f) Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 1 tel que $I \cap]1, 2[= \{1\}$.
- g) Si je ne fais pas un métier qui me plaît, je ne serai pas heureux.
- h) Si ma mémoire était parfaite, je me souviendrais de tout.

Exercice 7

Considérons la proposition suivante ($\mathcal{P}$ désigne le plan et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites du plan) :

$$\forall D \in \mathcal{D}, \forall M \in \mathcal{P}, ((M \notin D) \implies (\exists \Delta \in \mathcal{D}, ((M \in \Delta) \text{ et } (D \cap \Delta = \emptyset)))).$$

1. Ecrire cette proposition en français.
2. Ecrire sa négation en français puis avec des symboles mathématiques.

Exercice 8

Démontrer que, pour x, y réels :

$$(x \neq y) \implies ((x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)).$$

Exercice 9

Démontrer que pour tout entier relatif n , $6n^2 - 4n + 1$ est un entier positif.

Exercice 10

Démontrer que pour tout réel x , $|x - 2| < x^2 - 2x + 3$.

Exercice 11

Montrer que si n est un entier naturel non nul, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 12

Montrer que la proposition “ $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 3^n$ est un nombre premier” est fausse.

Exercice 13

Démontrer que :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{b) } \forall n \in \mathbb{N}, n \leq n! \leq n^n \\ \text{c) } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i \times i! = (n+1)! - 1 & \text{d) } \forall n \geq 5, 2^n > n^2. \end{array}$$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 2, u_n = -2u_{n-2} + 3u_{n-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $(\mathcal{P}_n)$ la proposition “ $u_n = 1 + 2^n$ ” et $(\mathcal{Q}_n)$ la proposition “ $u_n = 2^n$ ”.

1. Montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(\mathcal{Q}_n)$ est héréditaire dès que $n \geq 2$ alors qu'elle est toujours fausse.

Exercice 15

Soit a un nombre réel différent de 1, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Que devient la précédente somme quand $a = 1$?

Exercice 16

Démontrer que :

1. $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 3n(n + 1)$ est un multiple de 6.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est un multiple de 6.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ est un entier.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ impair si et seulement si n est impair.
6. $\forall n \geq 3, n^{n+1} > (n + 1)^n$.
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$