UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Feuille d'exercices 6

Intégration

Exercice 1
D'après le relation de Chasles,
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right|$. Or $f(a) = f(b) = 0$ alors : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} (f(x)-f(a))dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)-f(b)dx\right|$.

Comme, f est dérivable sur $]a,b[$, par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in]a, \frac{a+b}{2}[$ tels que $|f(x)-f(a)| \leq M|x-a|$ et pour tout $x \in]\frac{a+b}{2}, b[$, $|f(x)-f(b)| \leq M|x-b|$.

En appliquant l'inégalité triangulaire, on a $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)-f(a)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)-f(b)|dx$. Comme $f \leq g$ implique, pour tout $c<d$, $\int_c^d f(x)dx \leq \int_c^d g(x)dx$ on a :
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M|x-a|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M|x-b|dx.$

Pour tout $x \in]a, \frac{a+b}{2}[$, $|x-a| = x-a$ d'où, $\int_a^{\frac{a+b}{2}} M|x-a|dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)dx = \left[M\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^{\frac{a+b}{2}} = M\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2}{2} = M\frac{(a-b)^2}{8}$.

Pour tout $x \in]\frac{a+b}{2}, b[$, $|x-b| = b-x$ d'où, $\int_{\frac{a+b}{2}}^b M|x-b|dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx = \left[-M\frac{(b-x)^2}{2}\right]_{\frac{a+b}{2}}^b = M\frac{(\frac{a+b}{2}-b)^2}{2} = M\frac{(a-b)^2}{8}$.

Finalement,
$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq 2M\frac{(a-b)^2}{8} = M\frac{(a-b)^2}{4}$

Exercice 2
La fonction f est continue, on peut poser $g = f$ et donc $\int_a^b f^2(x)dx$. La fonction f^2 est positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, elle est donc nulle sur $[a,b]$.

Exercice 3
Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite en $+\infty$, il existe $B > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > B \implies |f(x)-l| < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $x > B$. On a $\frac{1}{x}\int_0^x l dt = \frac{1}{x}[lt]_0^x = \frac{1}{x}lx = l$.

D'où, par linéarité de l'intégrale, on a : $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx - l\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(x)-l)dx\right|$.

Puis en utilisant, l'inégalité triangulaire, on obtient : $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx - l\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(x)-l|dx$.

Par la relation de Chasles, on a, en posant $K = \int_0^B |f(x)-l|dx$: $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx - l\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^B |f(x)-l|dx + \frac{1}{x}\int_B^x |f(x)-l|dx = \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_B^x \frac{\epsilon}{2}dx = \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\left[x\frac{\epsilon}{2}\right]_B^x = \frac{K}{x} + \frac{1}{x}(x-B)\frac{\epsilon}{2}$.

De plus, comme $B > 0$, $x - B < x$ d'où, $\frac{x-B}{x}\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Et finalement, $\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx - l\right| \leq \frac{K}{x} + \frac{\epsilon}{2}$.

Par ailleurs, $\frac{K}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il existe $B' > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > B' \implies \frac{K}{x} < \frac{\epsilon}{2}$.

Finalement, en posant $A = \max(B, B')$, soit $x \in \mathbb{R}$, $x > A \implies \frac{1}{x}\int_0^B |f(x)-l|dx + \frac{1}{x}\int_B^x |f(x)-l|dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

On conclut que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx = l$.

Exercice 4

1. La fonction g est la primitive de f qui s'annule en 0, g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{g(x)}{x}$. La fonction h est continue si $h(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. La fonction g est nulle en 0 donc $h(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x}$ quand x tend vers 0, $\frac{g(x)-g(0)}{x}$ tend vers la dérivée de g en 0, c'est à dire $g'(0) = f(0) = 0$. Donc, h est continue en 0. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produits de fonctions dérivables.

Exercice 5

Supposons dans un premier temps que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, on a donc

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

ce qui équivaut à $\int_a^b |f(x)| - f(x)dx = 0$. Or, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq |f(x)|$ ce qui équivaut à $|f(x)| - f(x) \geq 0$. La fonction $x :\mapsto |f(x)| - f(x)$ est positive et d'intégrale nulle sur $[a,b]$, elle est donc nulle sur $[a,b]$.

Le cas $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ se traite de la même manière et on conclut que cette égalité est vraie pour toute fonction f de signe constant.

Exercice 6

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction admet donc une primitive.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[x, 2x]$ est un intervalle fermé borné non vide, comme f est continue alors $G(x)$ existe.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $G(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} f(t)dt$, en effectuant le changement de variable $u = -t$ et donc $du = -dt$, on a : $G(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(-u)(-du) = -\int_x^{2x} f(-u)du$. Comme f est paire alors $f(-u) = f(u)$ pour tout $u \in [x, 2x]$ d'où $G(-x) = -\displaystyle\int_x^{2x} f(-u)du = -\int_x^{2x} f(u)du = -G(x)$. et donc G est impaire.

(c) Soit $x > 0$. Soit $x < t < 2x$. Comme $\sqrt{1+t^4}$ est strictement positif, $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est strictement positif. De plus, par décroissance de la fonction inverse et croissance de la fonction racine carrée, on obtient : $f(t) \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^4}} = \dfrac{1}{t^2}$. Par croissance de l'intégrale, on a : $0 \leq G(x) \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt$. Par ailleurs, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt = [-\frac{1}{t}]_x^{2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$. Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{2x}$ tend vers 0 et donc par théorème de comparaison, $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a par Chasles $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^{2x} f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt + \int_0^{2x} f(t)dt = F(2x) - F(x)$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$. La fonction F est une primitive de f donc $F' = f$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x)2f(x) - f(x)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
G'(x) &= 2\frac{1}{\sqrt{1+(2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \\
&= \frac{2(\sqrt{1+x^4}) - \sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+(2x)^4}\sqrt{1+x^4}} \\
&= \frac{4(1+x^4) - 1 - 16x^4}{\sqrt{1+(2x)^4}\sqrt{1+x^4}(2(\sqrt{1+x^4}) + \sqrt{1+16x^4})} \\
&= \frac{4 + 4x^4 - 1 - 16x^4}{\sqrt{1+(2x)^4}\sqrt{1+x^4}(2(\sqrt{1+x^4}) + \sqrt{1+16x^4})} \\
&= \frac{3 - 12x^4}{\sqrt{1+(2x)^4}\sqrt{1+x^4}(2(\sqrt{1+x^4}) + \sqrt{1+16x^4})}.
\end{aligned}$$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = \sqrt{1+(2x)^4}\sqrt{1+x^4}(2(\sqrt{1+x^4}) + \sqrt{1+16x^4})$, comme $D(x)$ est le produit de racines carrées non nulles, $D(x)$ est strictement positif.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $3 - 12x^4 = 3(1 - 4x^4) = 3(1 - (2x^2)^2) = 3(1 - 2x^2)(1 + 2x^2) = 3(1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)(1 + 2x^2)$. On effectue un tableau de signes :

	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$1+2x^2$		$+$		$+$		$+$	
$1-\sqrt{2}x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+\sqrt{2}x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)(1+2x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On conclut que sur $\left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, G' est strictement négative et donc G est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$, g' est strictement positive sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ donc G est strictement croissante sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, on a :
$$\int_a^b f(x)^n dx \leq \int_a^b M^n dx = M^n(b-a).$$
Par croissance la fonction $x :\mapsto x^{\frac{1}{n}}$, on obtient :
$$\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq \int_a^b M^n dx = (M^n(b-a))^{\frac{1}{n}} = M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$
2. Soit $M > \epsilon > 0$, il existe $x \in [a,b]$, $M \geq f(x) \geq M - \frac{\epsilon}{2}$. La fonction f est continue sur $[a,b]$, elle donc continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $y \in [a,b]$, $|x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \implies f(y)-f(x) > -\frac{\epsilon}{2} \implies f(y) > f(x) - \frac{\epsilon}{2} > M - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = M - \epsilon$. Or par Chasles, $\int_a^b f(t)^n dt = \int_a^{x-\eta} f(t)^n dt + \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(t)^n dt + \int_{x+\eta}^b f(t)^n dt$. Or f est positive sur $[a,b]$, donc positive sur $[a, x-\eta]$ et sur $[x+\eta, b]$ donc $\int_a^{x-\eta} f(t)^n dt + \int_{x+\eta}^b f(t)^n dt \geq 0$ d'où $\int_a^b f(t)^n dt \geq \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(t)^n dt$. Par croissance de l'intégrale et comme pour tout $t \in]x-\eta, x+\eta[$, $f(t) > M-\epsilon$, on a $\int_a^b f(t)^n dt > (M-\epsilon)^n \int_{x-\eta}^{x+\eta} dt = ((x+\eta)-(x-\eta))(M-\epsilon)^n = 2\eta(M-\epsilon)^n$.
3. En utilisant les deux inégalités, on conclut que $\left(\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} = M.$$

Exercice 8

1. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = cx^m$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\int_0^1 x^n f(x) dx = (n+1)\int_0^1 cx^{n+m} dx = \left[(n+1)\frac{c}{m+n+1}x^{m+n+1}\right]_0^1 = \frac{c(n+1)}{m+n+1}$. On conclut que $\int_0^1 x^n f(x) dx$ tend vers $c = f(1)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme, $(n+1)\int_0^1 x^n dx = \left[x^{n+1}\right]_0^1 = 1$, on a :
$\left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x) dx - f(1)\right| = |(n+1)\int_0^1 x^n (f(x)-f(1)) dx|.$
Par l'inégalité triangulaire, on a $\left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x) dx - f(1)\right| \leq (n+1)\int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx$.

Et par Chasles, $(n+1)\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx = (n+1)\int_0^\alpha x^n|f(x)-f(1)|dx + (n+1)\int_\alpha^1 x^n|f(x)-f(1)|dx$.

En réutilisant l'inégalité triangulaire : $(n+1)\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|dx \leq (n+1)\int_0^\alpha x^n|f(x)|dx + (n+1)\int_0^\alpha x^n|f(1)|dx + (n+1)\int_\alpha^1 x^n|f(x)-f(1)|dx = (n+1)\int_0^\alpha x^n|f(x)|dx + |f(1)|\left[x^{n+1}\right]_0^\alpha + (n+1)\int_\alpha^1 x^n|f(x)-f(1)|dx = (n+1)\int_0^\alpha x^n|f(x)|dx + |f(1)|\alpha^{n+1} + (n+1)\int_\alpha^1 x^n|f(x)-f(1)|dx$.

3. Soit $\epsilon > 0$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc elle est continue en 1 et il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $1-x<\alpha \implies |f(x)-f(1)|<\epsilon$. De plus, f étant continue sur $[0,1]$, elle est continue sur l'intervalle fermé borné non vide $[0,\alpha]$, elle est donc majorée sur $[0,\alpha]$ et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq M$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Finalement, en utilisant 2, $\left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx - f(1)\right| \leq M\left[x^{n+1}\right]_0^\alpha + |f(1)|\alpha^{n+1} + \epsilon\left[x^{n+1}\right]_\alpha^1 = M\alpha^{n+1} + |f(1)|\alpha^{n+1} + \epsilon(1-\alpha^{n+1}) = \alpha^{n+1}(M+|f(1)|-\epsilon)+\epsilon$. Comme $\alpha \in]0,1[$, α^{n+1} converge vers 0 et donc $\alpha^{n+1}(M+|f(1)|-\epsilon)$ converge vers 0. Finalement on a,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx - f(1)\right| \leq \epsilon$$

   et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx - f(1)\right| = 0$$

   et en conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1).$$

4. Soit $\epsilon > 0$. On pose, $M = \sup\{|f(u)-f(0)|,\ u \in [0,1]\} + \epsilon + 1$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc continue en 0 et il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $u \in [0,1]$, $u < \eta \implies |f(u)-f(0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $\alpha \in]0,1[$, la suite $((1-\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique dont la valeur absolue de la raison est strictement inférieure à 1, elle converge donc vers 0. Il existe $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies (1-\alpha)^n < \eta$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < x < 1-\alpha$ implique que $0 < x^n < (1-\alpha)^n$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique que $0 < x^n < \eta$ ce qui entraine que $|f(x^n)-f(0)| < \frac{\epsilon}{2}$ et ainsi, par croissance de l'intégrale, $\int_0^{1-\alpha}|f(x^n)-f(0)|dx \leq \int_0^{1-\alpha}\frac{\epsilon}{2}dx = \frac{\epsilon}{2}(1-\alpha) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit $\alpha < \frac{\epsilon}{2M} < 1$. Par croissance de l'intégrale, $\int_{1-\alpha}^1 |f(x^n)-f(0)|dx \leq \int_{1-\alpha}^1 Mdx = M\alpha < M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}$.

   Soit $\alpha < \frac{\epsilon}{2M}$, soit $n \geq N$, on a $\left|\int_0^1 f(x^n)dx - f(0)\right| = \left|\int_0^1 (f(x^n)-f(0))dx\right|$ et par inégalité triangulaire, on obtient $\left|\int_0^1 f(x^n)dx - f(0)\right| \leq \int_0^1 |f(x^n)-f(0)|dx$ et par la relation de Chasles, $\left|\int_0^1 f(x^n)dx - f(0)\right| \leq \int_0^{1-\alpha}|f(x^n)-f(0)|dx + \int_{1-\alpha}^1 |f(x^n)-f(0)|dx \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ceci est équivalent à la convergence de $\left(\int_0^1 f(x^n)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(0)$.

Exercice 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Or, par décroissance de la fonction $x :\mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $k \in \{n+1, \dots, 2n\}$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ d'où, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas convergente dans $\mathbb{R}$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Comme la suite est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et non convergente, elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc intégrable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[2, n+1]$ et $[1, n]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Par la relation de Chasles, on a $\int_2^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx$. Comme f est décroissante, alors pour tout $k \in \{2, \dots, n+1\}$, pour tout $x \in [k, k+1]$, $f(x) \leq f(k)$ d'où par croissance de l'intégrale, $\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(k)dx = \sum_{k=2}^{n} f(k)[x]_k^{k+1} = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

   Par la relation de Chasles, on a $\int_1^{n} f(x)dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx$. Comme f est décroissante, alors pour tout $k \in \{2, \dots, n+1\}$, pour tout $x \in [k-1, k]$, $f(x) \geq f(k)$ d'où par croissance de l'intégrale, $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(k)dx = \sum_{k=2}^{n} f(k)[x]_{k-1}^{k} = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.
3. Soit $\alpha < 1$. La fonction $x :\mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors on peut utiliser le 2. On a donc $\int_2^{n+1} f(x)dx = \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} = \frac{n+1^{1-\alpha}}{-\alpha+1} - \frac{2^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. Comme $1-\alpha > 0$ alors $\frac{n+1^{1-\alpha}}{-\alpha+1}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et par le théorème de comparaison, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Soit $\alpha > 1$.La fonction $x :\mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors on peut utiliser le 2. On a donc $\int_1^{n} f(x)dx = \int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n} = \frac{n^{1-\alpha}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$. Comme $1-\alpha < 0$ alors $\frac{n^{1-\alpha}}{-\alpha+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et par le théorème de comparaison, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. La fonction $x :\mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonction croissante et d'une fonction décroissante. On peut utiliser 2.. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} = [\ln(\ln(x))]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$. La suite $(\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ d'où par le théorème de comparaison, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$. $2nI_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt = 2n\int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$. Par

linéarité de l'intégrale on a $2n\int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt + 2n\int_0^x \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = 2nI_n(x) + 2n\int_0^x \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$.

On pose, pour tout $t \in [0,x]$, $u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ (au brouillon, $u'(t) = -2n\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}$) et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a par conséquent, pour tout $t \in [0,x]$, $u'(t) - 2n\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $v'(t) = 1$. On peut utiliser l'intégration par parties et :

$2n\int_0^x \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \frac{x}{(1+x^2)^n} - I_n(x)$.

On conclut que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 0$, $I_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}(2n-1)I_n(x)$.

2. Soit $x > 0$. $I_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\text{arctg}(t)]_0^x = \text{arctg}(x)$. D'après 1, $I_2(x) = \frac{2-1}{2}I_1(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\text{arctg}(x) + \frac{x}{2(1+x^2)}$. Toujours d'après 1., $I_3(x) = \frac{4-1}{4}I_2(x) + \frac{x}{4(1+x^2)^2} = \frac{3}{4}\left(\text{arctg}(x) + \frac{x}{2(1+x^2)}\right) + \frac{x}{4(1+x^2)^2}$.

Exercice 11

1. On pose, pour $x \in [1,e]$, $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{1+x}$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$, on peut utiliser l'intégration par parties. On a, pour tout $x \in [1,e]$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

   On a donc $\int_1^e \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{-\ln(x)}{1+x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x(1+x)}dx$. Or d'après le théorème des fractions rationnelles, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$, $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}$, $a(x+1) + bx = 1$. Par identification de polynôme, on obtient $a + b = 0$ et $a = 1$ et donc $b = -1$. Finalement, par linéarité, on obtient : $\int_1^e \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}dx = \frac{-1}{1+e} + \int_1^e \frac{1}{x}dx + \int_1^e \frac{1}{1+x}dx = \frac{-1}{1+e} + [\ln(x)]_1^e + [\ln(x+1)]_1^e = \frac{-1}{1+e} + 1 + \ln(e+1) - \ln(2)$.

2. On pose, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $u(x) = x$ et $v(x) = \tan(x)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on peut utiliser l'intégration par parties. On a, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$.

   On a donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\cos(x))^2}dx = [x\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx = \frac{\pi}{4} + [\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. On pose, pour $x \in [0,3]$, $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,3]$, on peut utiliser l'intégration par parties. On a, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $u'(x) = 1$ et

$v'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. On a donc $\displaystyle\int_0^3 \ln(1+t)dt = [t\ln(1+t)]_0^3 - \int_0^3 \frac{t}{1+t}dt = 3\ln(4) - \int_0^3 \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t}dt = 3\ln(4) - [t]_0^3 + [\ln(1+t)]_0^3 = 3\ln(4) - 3 + \ln(4) = 4\ln(4) - 3.$

4. On pose, pour $t \in [0, \ln(2)]$, $u(t) = (2t+1)$ et $v(t) = \exp(t)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(2)]$, on peut utiliser l'intégration par parties. On a, pour tout $x \in [0, \ln(2)]$, $u'(t) = 2$ et $v'(t) = \exp(t)$. On a donc $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} (2t+1)\exp(t)dt = [(2t+1)\exp(t)]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} 2\exp(t)dt = 4\ln(2) + 2 - 1 + 2[\exp(t)]_0^{\ln(2)} = 4\ln(2) + 2 - 1 + 4 - 2 = 4\ln(2) + 3.$

Exercice 12

1. Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)^2}$ n'est pas un élément simple de $\mathbb{R}$, d'après le théorème des fractions rationnelles, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$,

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t+1)^2}$$

ce qui équivaut à, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, $1 = a(t+1)^2 + bt(t+1) + ct$ ou encore à $at^2 + 2at + a + bt^2 + bt + ct = 1$ et par identification de polynôme, on obtient :

$$\begin{cases} a+b & = & 0 \\ 2a+b+c & = & 0 \\ a & = & 1 \end{cases}$$

En conclusion, $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.
Finalement, on a pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$,

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}.$$

Et, sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)^2}$ est

$$t :\mapsto \ln|t| + \ln|1+t| + \frac{1}{t+1}$$

En décomposant sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, on obtient que, sur $]-\infty, -1[$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)^2}$ est :

$$t :\mapsto \ln(-t) + \ln(-1-t) + \frac{1}{t+1}$$

sur $]-1, 0[$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)^2}$ est :

$$t :\mapsto \ln(-t) + \ln(1+t) + \frac{1}{t+1}$$

et sur $]0, +\infty[$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)^2}$ est :

$$t :\mapsto \ln(t) + \ln(1+t) + \frac{1}{t+1}$$

2. Pour $t \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, $\dfrac{t^2+t+4}{(t+1)(t+1)^2}$ n'est pas un élément simple de $\mathbb{R}$, d'après le théorème des fractions rationnelles, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$,

$$\frac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2} + \frac{c}{(t+2)^2}$$

ce qui équivaut à, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, $t^2+t+4 = a(t+2)^2+b(t+1)(t+2)+c(t+1)$ ou encore à $at^2+4at+4a+bt^2+3bt+2b+ct+c = t^2+t+4$ et par identification de polynôme, on obtient :

$$\begin{cases} a+b & = & 1 \\ 4a+3b+c & = & 1 \\ 4a+2b+c & = & 4 \end{cases}$$

ce qui entraine :

$$\begin{cases} a+b & = & 1 \\ 4a+3b+c & = & 1 \\ b & = & -3 & \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}$$

En conclusion, $a = 4$, $b = -3$ et $c = -6$.
Finalement, on a pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$,

$$\frac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2} = \frac{4}{t+1} - \frac{3}{t+2} - \frac{6}{(t+2)^2}$$

.

Et, sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2}$ est

$$t :\mapsto 4\ln|t+1| - 3\ln|2+t| + \frac{6}{t+2}$$

En décomposant sur les intervalles $]-\infty,-2[$, $]-2,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$, on obtient que, sur $]-\infty,-2[$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2}$ est :

$$t :\mapsto \ln(-t-1) + \ln(-2-t) + \frac{6}{t+2}$$

sur $]-2,-1[$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2}$ est :

$$t :\mapsto \ln(-t-1) + \ln(2+t) + \frac{6}{t+2}$$

et sur $]-1,+\infty[$, une primitive de $t :\mapsto \dfrac{t^2+t+4}{(t+1)(t+2)^2}$ est :

$$t :\mapsto \ln(t+1) + \ln(2+t) + \frac{6}{t+2}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$, $t^4+1 = t^4+1-2t^2+2t^2 = (t^2+1)^2-2t^2 = (t^2+1-\sqrt{2}t)(t^2+1+\sqrt{2}t)$. On $(-\sqrt{2})^2-4 = (\sqrt{2})^2-4 = 2-4 < 0$, on conclut donc que les polynômes $X^2+1+\sqrt{2}X$ et $X^2+1-\sqrt{2}X$ n'ont pas de racines réélles.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{t^4+1}$ n'est pas un élément simple de $\mathbb{R}$, d'après le théorème des fractions rationnelles, il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{a_1 t + b_1}{t^2+1-\sqrt{2}t} + \frac{a_2 t + b_2}{t^2+1+\sqrt{2}t}$$

ce qui équivaut à, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 = (a_1t+b_1)(t^2+1+\sqrt{2}t)+(a_2t+b_2)(t^2+1-\sqrt{2}t)$ ou encore à $a_1t^3+a_1\sqrt{2}t^2+a_1t+b_1t^2+b_1\sqrt{2}t+b_1+a_2t^3-a_2\sqrt{2}t^2+a_2t+b_2t^2-b_2\sqrt{2}t+b_2 = 1$ et par identification de polynôme, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 & = & 0 \\ \sqrt{2}(a_1 - a_2) + b_1 + b_2 & = & 0 \\ (a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 - b_2) & = & 0 \\ b_1 + b_2 = & & 1 \end{array}\right.$$

ce qui entraine :

$$\left\{\begin{array}{lcr} a_1 + a_2 & = & 0 \\ \sqrt{2}(a_1 - a_2) & = & -1 \\ \sqrt{2}(b_1 - b_2) & = & 0 \\ b_1 + b_2 = & 1 & \end{array}\right.$$

puis que :

$$\left\{\begin{array}{lcrl} a_1 + a_2 & = & 0 & \\ a_1 - a_2 & = & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & \\ 2b_1 & = & 1 & \leftarrow L_3 + L_4 \\ b_1 + b_2 = & 1 & & \end{array}\right.$$

et enfin :

$$\left\{\begin{array}{lcrl} a_1 + a_2 & = & 0 & \\ a_1 & = & \dfrac{-1}{2\sqrt{2}} & \leftarrow \dfrac{L_1 + L_2}{2} \\ b_1 & = & \dfrac{1}{2} & \\ b_2 = & \dfrac{1}{2} & & \end{array}\right.$$

En conclusion, $a_1 = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$, $a_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_2 = \dfrac{1}{2}$.
Finalement, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}t + \frac{1}{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}t + \frac{1}{2}}{t^2+1+\sqrt{2}t}.$$

ou encore :

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{\frac{-1}{4\sqrt{2}}(2t-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}}{t^2+1-\sqrt{2}t} + \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2t+\sqrt{2}) + \frac{1}{4}}{t^2+1+\sqrt{2}t}.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t^2 - \sqrt{2}t + 1 = \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)t - 1\right)^2 + 1\right).$$

De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$t^2 + \sqrt{2}t + 1 = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)t + 1\right)^2 + 1\right).$$

On conclut que :

$$\frac{1}{t^4+1} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}\frac{2t-\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)t-1\right)^2+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+1+\sqrt{2}t} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)t+1\right)^2+1}.$$

Finalement, sur $\mathbb{R}$, une primitive de $t :\mapsto \frac{1}{t^4+1}$ est

$$t :\mapsto -\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(t^2 + \sqrt{2}t + 1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + 1\right).$$

Exercice 13

1. Soit $t \in [0,1]$ et $a \neq 0$.On a $t^2 + a^2 = a^2\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2) + 1\right)$, et on effectue le changement de variable $\phi(t) = \frac{t}{a}$, puis $u = \phi(t)$. La fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = \frac{1}{a}$, d'où, $dt = adu$. De plus, $\phi(1) = \frac{1}{a}$ et $\phi(0) = 0$. On a par conséquent, $\int_0^1 \frac{1}{t^2+a^2}dt = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{a}\frac{1}{u^2+1}adu = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{u^2+1}du = [\operatorname{arctg}(u)]_0^{\frac{1}{a}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)$.
2. Soit $t \in [0,1]$, $-t^2+2t+1 = -(t^2-2t)+1 = -(t-1)^2+2$ On a donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-(t-1)^2+2}}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{(t-1)}{\sqrt{2}}\right)^2}}dt$. On effectue le changement de variable $\phi(t) = \frac{(t-1)}{\sqrt{2}}$, puis $u = \phi(t)$. La fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où, $dt = \sqrt{2}du$. De plus, $\phi(0) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\phi(1) = 0$. On a par conséquent, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-t^2+2t+1}}dt = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-u^2}}\sqrt{2}du = [\arcsin(u)]_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^0 = \frac{\pi}{4}$.
3. Soit $t \in [0,1]$. On pose $\phi(t) = \arcsin(t)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et on effectue le changement de variable $u = \phi(t)$, on a donc $dt = \cos(u)du$ et donc, par parité de la fonction $t :\mapsto \sqrt{1-t^2}$, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin(u))^2}\cos(u)du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u)+1}{2}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2u)+1)du = [\frac{\sin(2t)}{2} + t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

4. Soit $t \in [0,2]$. On pose $\phi(t) = t^2$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$ et on effectue le changement de variable $u = \phi(t)$, on a donc $dt = 2tdu = 2\sqrt{u}du$. De plus, $\phi(0) = 0$ et $\phi(2) = 4$ et donc $\int_0^2 t\ln(1+t^2)dt = \int_0^4 \sqrt{u}\ln 1 + u\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^4 \ln(1+u)du = [t\ln(1+t) - t + \ln(1+t)]_0^4 = 4\ln(5) - 4 + \ln(5) = 5\ln(5) - 4$.
5. Soit $t \in [1,e]$. On pose $\phi(t) = \ln(t)$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $[1,e]$ et on effectue le changement de variable $u = \phi(t)$, on a donc $dt = \frac{1}{t}du = \exp(-u)du$. De plus, $\phi(1) = 0$ et $\phi(e) = 1$ et donc $\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t}dt = \int_0^1 \exp(-u)\exp(u)\cos(u)du = \int_0^1 \cos(u)du = [\sin(u)]_0^1 = \sin(1)$.

Exercice 14

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, $1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2 = \cos^2(t) - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2 + \sin^2(t) = (\alpha - \cos(t))^2 + \sin^2(t)$. De plus, $1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2 = 0$ ssi $(\alpha - \cos(t)) = 0$ et $\sin(t) = 0$ ce qui équivaut à $\cos(t) = \alpha$ et $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|\cos(k\pi)| = 1$ et $0 < \alpha$ et $\alpha \neq 1$ donc $\cos(t) = \alpha$ et $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est faux et on conclut que $(\alpha - \cos(t))^2 + \sin^2(t) > 0$ et par conséquent, $t :\mapsto \ln(1 - 2\alpha\cos(t) + \alpha^2)$ est bien définie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^n$. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a $e^{i\frac{2k\pi}{n}} + e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2k\pi}{n}\right)$, la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est paire et la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire donc $e^{i\frac{2k\pi}{n}} + e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - i\sin\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$. De plus, $e^{i\frac{2k\pi}{n}}e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = 1$. On a donc : $1 - 2\alpha\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \alpha^2 = (\alpha - e^{i\frac{2k\pi}{n}})(\alpha - e^{-i\frac{2k\pi}{n}})$. Or, $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \left(e^{-2ik\pi}\right) = \left(e^{2ik\pi}\right) = 1$ donc pour tout $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ est racine du polynôme de $\alpha^n - 1$. Les racines du polynôme de $\alpha^n - 1$ sont donc $e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ldots, e^{2i\pi}$ ou $(e^{-i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, e^{-i\frac{2k\pi}{n}}, \ldots, e^{-2i\pi})$ et donc
$$\prod_{k=1}^{n}(\alpha - e^{i\frac{2\pi}{n}}) = \prod_{k=1}^{n}(\alpha - e^{-i\frac{2\pi}{n}}) = \alpha^n - 1.$$
D'où,
$$\prod_{k=1}^{n}(1 - 2\alpha\cos(\frac{2k\pi}{n}) + \alpha^2) = (\alpha^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^{n}(\alpha - e^{i\frac{2k\pi}{n}})(\alpha - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}).$$
Par distribuitivité de la multiplication
$$\prod_{k=1}^{n}(\alpha - e^{i\frac{2k\pi}{n}})(\alpha - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}) = \prod_{k=1}^{n}(\alpha - e^{i\frac{2k\pi}{n}})\prod_{k=1}^{n}(\alpha - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}) = (\alpha^n - 1)^2.$$
3. On a d'après le théorèmes des sommes de Riemann,
$$\left(\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \alpha^2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
converge vers I.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \alpha^2\right) &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2\alpha\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \alpha^2\right)\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\ln((\alpha^n - 1)^2) = \frac{4\pi}{n}\ln|\alpha^n - 1|.\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $0 < \alpha < 1$. On a $|\alpha^n - 1| = 1 - \alpha^n$. On a, $\frac{4\pi}{n} \ln|\alpha^n - 1| = \frac{4\pi}{n} \ln(1 - \alpha^n)$.
La suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison strictement plus petite que 1 alors $1-\alpha^n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, par continuité de la fonction $x :\mapsto \ln(x)$, $(\ln(1-\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et donc $\left(\frac{4\pi}{n}\ln(1-\alpha^n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Supposons que $1 < \alpha$. On a $|\alpha^n - 1| = \alpha^n - 1$. On a, $\frac{4\pi}{n} \ln|\alpha^n - 1| = \frac{4\pi}{n}\ln(\alpha^n - 1) = \frac{4\pi}{n}\ln\left(\alpha^n(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right) = \frac{4\pi}{n}\ln(\alpha^n) + \frac{4\pi}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right) = 4\pi\ln(\alpha) + \frac{4\pi}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)$.
La suite $\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison strictement inférieure à 1 d'où $\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge 1, par continuité de la fonction $x :\mapsto \ln(x)$, $\left(\ln\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et donc $\left(\frac{4\pi}{n}\ln(1-\alpha^n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $4\pi\ln(\alpha)$.
Finalement, si $\alpha \in]0,1[$, $I = 0$, si $\alpha > 1$, $I = 4\pi\ln(\alpha)$.

Exercice 15

1. Soit $u > 0$. On effectue un changement de variable, on pose, pour tout $x \in [u, 3u]$, $\phi(x) = \frac{x}{u}$. La fonction ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $[u, 3u]$. On a donc, pour tout $x \in [u, 3u]$, $\phi'(x) = \frac{1}{u}$, $\phi(u) = 1$ et $\phi(3u) = 3$. On pose $t = \phi(x)$ d'où $dt = \phi'(x)dx = \frac{1}{u}dx$ et $dx = udt$. Par conséquent,
$\int_u^{3u} \frac{\cos x}{x} dx = \int_1^3 \frac{\cos(tu)}{t} dt.$
Par ailleurs,
$$\int_1^3 \frac{\cos(tu)}{t}dt - \int_1^3 \frac{1}{t}dt = \int_1^3 \frac{\cos\left(\frac{tu}{2} + \frac{tu}{2}\right) - 1}{t}dt = \int_1^3 \frac{\cos^2\left(\frac{tu}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{tu}{2}\right) - 1}{t}dt = \int_1^3 \frac{\cos^2\left(\frac{tu}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{tu}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{tu}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{tu}{2}\right)}{t}dt = \int_1^3 \frac{-2\sin^2\left(\frac{tu}{2}\right)}{t}dt.$$
On conclut que, par l'inégalité triangulaire que,
$$\left|\int_1^3 \frac{\cos(tu)}{t}dt - \int_1^3 \frac{1}{t}dt\right| \leq \int_1^3 \frac{\left|-2\sin^2\left(\frac{tu}{2}\right)\right|}{t}dt = \int_1^3 \frac{2\sin^2\left(\frac{tu}{2}\right)}{t}dt.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x) - x$ est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables, on a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. La fonction g est par conséquent, décroissante et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq g(0) = 0$. On conclut que, pour tout $t \in [1, 3]$, par croissance de la fonction carrée, $\sin^2\left(\frac{tu}{2}\right) \leq \left(\frac{tu}{2}\right)^2$.
Finalement, on a $\left|\int_1^3 \frac{\cos(tu)}{t}dt - \int_1^3 \frac{1}{t}dt\right| \leq \int_1^3 \left(\frac{tu}{2}\right)^2 \times \frac{1}{t}dt = \int_1^3 t\left(\frac{u}{2}\right)^2 dt = \left(\frac{u}{2}\right)^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 = 4\left(\frac{u}{2}\right)^2$

Or $4\left(\frac{u}{2}\right)^2$ tend vers 0 quand u tend vers 0, donc par le théorème d'encadrement, $\left|\int_1^3 \frac{\cos(tu)}{t}dt - \int_1^3 \frac{1}{t}dt\right|$ tend vers 0 quand u tend vers 0 et en conclusion, $\int_1^3 \frac{\cos(tu)}{t}dt$ tend vers $\int_1^3 \frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_1^3 = \ln(3)$.

2. Soit $u > 0$. $0 \leq \int_0^u e^{-u^2}e^{t^2}dt \leq \int_0^u e^{-u^2}e^{tu}dt = e^{-u^2}\int_0^u e^{tu}dt = e^{-u^2}\left[\frac{e^{tu}}{u}\right]_0^u = e^{-u^2}\frac{e^{u^2}-1}{u} = \frac{1-e^{-u^2}}{u}$. Or $\frac{1-e^{-u^2}}{u}$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$ donc par le théorème de comparaison, $\int_0^u e^{-u^2}e^{t^2}dt$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$.

Exercice 16

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$, par croissance du logarithme, on a $\ln(1) \leq \ln(1+x^2) \leq \ln(1+1) = \ln(2)$. D'où, $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)dx = \ln(2)\left[\frac{x}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$. La suite $\left(\frac{\ln(2)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, d'où, par le théorème de comparaison, $\left(\int 01x^n \ln(1+x^2)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ par décroissance de la fonction inverse. Par conséquent, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, par le théorème de comparaison, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ converge vers 0.

Exercice 17

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ On reconnait une somme de Riemann donc $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$. On pose, pour $x > 0$, $f(x) = x\sin(x)$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. On reconnait une somme de Riemann donc $\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 x\sin(x)dx$. Pour calculer cette intégrale, on utilise l'intégration par partie avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x$ et $v(x) = -\cos(x)$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ et pour $x \in \mathbb{R}$,

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin(x)$. $\displaystyle\int_0^1 x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)dx = -\cos(1) + [\sin(x)]_0^1 = \sin(1) - \cos(1)$.

3. On reconnait tout de suite une somme de Riemann, la fonction $x :\mapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est continue donc intégrable et d'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{f'\left(\frac{k}{n}\right)}{f\left(\frac{k}{n}\right)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = [\ln(f(x)]_0^1 = \ln(e) - \ln(1) = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)n!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1 + \dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. $\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ est strictement positif, on peut donc prendre le logarithme et $\ln\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. On reconnait une somme de Riemann. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est intégrable et d'après le théorème des sommes de Riemann, $\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln(2) - 1$ (On peut se servir de l'exercice 11 3.).