UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Feuille d'exercices 5

Continuité et dérivabilité

1 Limites

Exercice 1

1. On a $4^2 - 5 \times 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$ et $1 - 5 \times 1 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$, on conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$
Finalement, comme $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}$ est continue en 4 alors, la limite de $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ quand x tend vers 4 existe et $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} = \dfrac{1}{12}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} - 1 \leq E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$, en multipliant par x, on obtient si $x > 0$, $1 - x \leq xE\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ et si $x < 0$, $1 - x \geq xE\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 1$. Dans les deux cas, en faisant tendre x vers 0, on obtient que, en utilisant le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x^3+1)^{1/3} - (x+1) = x\left(\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^{1/3} - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$. Pour x assez grand, $\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^{1/3} = 1 + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
Pour x assez grand, $(x^3+1)^{1/3} - (x+1) = x\left(1 + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right) - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$, d'où, pour x assez grand, $(x^3+1)^{1/3} - (x+1) = \dfrac{1}{3x^2} - 1 + xo\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
Or, pour x assez grand, $0 \leq x\left|o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right| \leq x^3\left|o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right|$ et par définition, $x^3 o\left(\dfrac{1}{x^3}\right) \to 0$ quand x tend vers $+\infty$.
On conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+1)^{1/3} - (x+1) = -1$.

Exercice 2

Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et que f soit périodique de période T. Montrons, par l'absurde que f est constante. Supposons que f ne soit pas constante. Il existe donc x_1 et x_0 tels que $f(x_1) \neq f(x_0)$. On peut supposer que $f(x_1) > f(x_0)$.

Or, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, c'est à dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq A \implies |f(x) - l| < \epsilon$.

Prenons $\epsilon = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{3}$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \implies |f(x) - l| < \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{3}$.

Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x_1) = f(x_1 + nT)$ et $x_1 + nT \geq A$ et il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $f(x_0) = f(x_0 + mT)$ et $x_0 + mT \geq A$.

On a donc $0 < |f(x_1) - f(x_0)| = |f(x_1) - l + l - f(x_0)|$, en utilsant l'inégalité triangulaire, $0 < |f(x_1) - f(x_0)| \leq |f(x_1) - l| + |l - f(x_0)| < 2\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{3}$ ce qui absurde, et donc f est constante.

Exercice 3

Il faut montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq M \implies \left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| \leq \epsilon$ ou encore que $\left|\dfrac{1}{x}\right| |f(x) - xl| \leq \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq A$ implique que $|f(x+1) - f(x) - l| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Soit $x > A \geq 0$. Posons, $n = E(x - A)$ (ou E est la partie entière) et $r = x - A - n \in]0, 1[$.

Pour tout $k = 1, \dots, n$, on a $|f(x - k + 1) - f(x - k) - l| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Or comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (f(x - k + 1) - f(x - k) - l) = f(x) - f(x - n) - nl$ et que, par inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x - k + 1) - f(x - k) - l\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x - k + 1) - f(x - k) - l|,$$

on conclut que $|f(x) - f(x - n) - nl| \leq \dfrac{n\epsilon}{2}$.

Maintenant, $|f(x) - xl| = |f(x) - f(x - n) + f(x - n) - nl + nl - xl| \leq |f(x) - f(x - n) - nl| + |f(x - n) + nl - xl|$, par l'inégalité triangulaire. Mais, $r = x - A - n \iff n = x - A - r$, ce qui implique que $f(x - n) = f(x - x + A + r) = f(A + r)$. Le réel r appartenant à $[0, 1[$, $f(A + r) \in f(]A, A + 1[) \subset f([A, A + 1])$. La fonction est bornée sur tout intervalle fermé borné non-vide donc il existe M tel que $|f(A + y)| \leq M$ pour tout $y \in [A, A + 1]$.

Finalement, $\dfrac{1}{x}|f(x) - xl| \leq \dfrac{1}{x}(|f(x) - f(x - n) - nl| + |f(x - n) + nl - xl|) \leq \dfrac{n\epsilon}{2x} + \dfrac{M + |l|(x - n)}{x}$. Par définition de la partie entière, on a d'une part, $n \leq x - A < x$ d'où, $\dfrac{n}{x} \leq 1$ et d'autre part, $x - A < n + 1$ ce qui équivaut à $x - n < A + 1$ d'où, $\dfrac{M + (x - n)|l|}{x} < \dfrac{M + (A + 1)|l|}{x}$. Or quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{M + (A + 1)|l|}{x}$ tend vers 0, il existe $B > 0$, tel que $\dfrac{M + (A + 1)|l|}{x} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

En conclusion, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A' = \max(A, B)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > A'$ implique que $\left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Exercice 4

Cet exercice permet de montrer que le prolongement par continuité construit bien des fonctions continues.

Soit $x_0 \in [0, 1]$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - \phi(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Soit $x_1 \in [0,1]$ tel que $|x_1 - x_0| < \frac{\alpha}{2}$. Par définition de la limite en x_1, il existe $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$, tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $|x - x_1| < \alpha_1 \implies |f(x) - \phi(x_1)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Soit $x \in [0,1]$ tel que $|x - x_1| < \alpha_1$. On a, par l'inégalité triangulaire, $|x - x_0| \leq |x - x_1| + |x_1 - x_0| < \alpha_1 + \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, ce qui implique que $|f(x) - \phi(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ et comme $|f(x) - \phi(x_1)| < \dfrac{\epsilon}{2}$, on obtient par inégalité triangulaire, $|\phi(x_0) - \phi(x_1)| \leq |f(x) - \phi(x_0)| + |f(x) - \phi(x_1)| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Ceci prouve la continuité de la fonction ϕ.

Exercice 5

1. Il suffit de prendre une fonction constante sur un ensemble partout dense dans $\mathbb{R}$ par exemple $\mathbb{Q}$ et de prendre la constante opposée ainsi f sera discontinue sur tout $\mathbb{R}$ puisque que tout voisinage d'un réel x contient des réels et des rationnels et la différence des images ne peut être majorée par n'importe quel $\epsilon > 0$. La valeur absolue de f sera continue car constante. Finalement, on peut prendre la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x} \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si x} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. On peut prendre, la fonction f telle que pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si x} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ et x} \neq \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si x} = \dfrac{1}{2} \\ x & \text{si x} \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Exercice 6

Comme f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, alors il existe $x_1 > 0$ tel que $f(x_1) > 0$. De plus, il existe $x_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x > x_2 \implies f(x) \geq f(x_1)$. Or f étant continue, elle est minorée et atteint son minimum m sur l'intervalle fermé borné non vide $[0, x_2]$ et il existe $x^* \in [0, x_2]$, tel que $f(x^*) = m$. On conclut que f est minorée par $\min(m, f(x_1))$ et donc que $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^+} f$ existe puis qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ ($x_0 = x^*$ si $m < f(x_1)$ et x_1 sinon) tel que $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^+} f(x)$.

Exercice 7

On pose, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. Comme f est à valeurs dans $[0,1]$ $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, g l'est aussi en tant que somme de fonctions continues sur $[0,1]$ et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$ ce qui équivaut à $f(x_0) = x_0$.

Pour les exercices 8, 9, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1 *Pour tout, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$ et $c < d$. On a $\max(a, c) < \max(b, d)$.*

Démonstration: On a deux cas. Premièrement, si $\max(a, c) = a$, comme $a < b$ on a $\max(a, c) = a < b \leq \max(b, d)$. Deuxièmement, si $\max(a, c) = c$, comme $c < d$ on a $\max(a, c) = c < d \leq \max(b, d)$.

Dans les deux cas, on a bien $\max(a, c) < \max(b, d)$. ∎

Lemme 2 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $\max(a + t, b + t) = \max(a, b) + t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration: Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $\max(a+t, b+t) = b+t$ alors $a+t \leq b+t$ ce qui implique que $a \leq b$ et donc $\max(a,b) = b$ et $\max(a,b)+t = b+t$, d'où l'égalité. Le cas $\max(a+t, b+t) = a+t$ se montre de la même manière. ∎

Lemme 3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $\max(a,b) \leq \max(a,c)$, pour tout $c \geq b$.*

Démonstration: Si $\max(a,b) = a$. Comme $a \leq \max(a,c)$ quelque soit $c \in \mathbb{R}$, l'inégalité est démontrée. Si $\max(a,b) = b$ alors pour $c \geq b$, $c \geq a$ et $\max(a,c) = c$ d'où $a \leq b \leq c = \max(a,c)$ et l'inégalité est démontrée. ∎

Exercice 8

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$.

   Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \alpha_1$ implique que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ce qui équivaut à $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ et $f(x) > f(x_0) - \epsilon$.

   Il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \alpha_2$ implique que $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon$ ce qui équivaut à $g(x) < g(x_0) + \epsilon$ et $g(x) > g(x_0) - \epsilon$.

   On pose $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, et soit $|x - x_0| < \alpha$. Or $|x - x_0| < \alpha$ implique que $|x - x_0| < \alpha_1$ et $|x - x_0| < \alpha_2$ et donc que $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, $f(x) > f(x_0) - \epsilon$, $g(x) < g(x_0) + \epsilon$ et que $g(x) > g(x_0) - \epsilon$. On conclut par, Lemme 1, Lemme 2, que :

   $$\max(f(x_0) - \epsilon, g(x_0) - \epsilon) = \max(f(x_0), g(x_0)) - \epsilon < \max(f(x), g(x))$$

   et

   $$\max(f(x), g(x)) < \max(f(x_0) + \epsilon, g(x_0) + \epsilon) = \max(f(x_0), g(x_0)) + \epsilon.$$

   Finalement, $|x - x_0| < \alpha$ implique que $|\max(f(x), g(x)) - \max(f(x_0), g(x_0))| < \epsilon$, x_0 et ϵ étant arbitrairement choisi on conclut que $x \mapsto \max f(x), g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Il suffit de prendre un contre-exemple. Par exemple, on prend f la fonction constante à 0 et g la fonction identité. La dérivée en 0 de f vaut 0 alors que la dérivée en 0 de g est 1. Donc la dérivée en 0 à droite vaut 1 et la dérivée à gauche vaut 0. Si la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ était dérivable en 0, la dérivée à gauche sera égale à la dérivéé à droite.

Exercice 9

Soit $x \in [0,1]$. Comme f est continue et que $[0,x]$ est un intervalle fermé borné non vide alors f est majorée sur $[0,x]$ et donc $\phi(x)$ existe de plus on peut dire qu'il existe $\bar{x} \in [0,x]$ tel que $\phi(x) = f(\bar{x})$. On conclut que ϕ est bien définie et qu'on peut réecrire le $\sup\{f(t) \mid t \in [0,x]\}$ comme $\max\{f(t) \mid t \in [0,x]\}$.

Soient A, B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On a $A \subset B$ implique que $\sup(A) \leq \sup(B)$. En effet supposons que $A \subset B$ et $\sup(A) > \sup(B)$, c'est à dire qu'il existe $x \in A$ tel que $x > \sup(B)$. Or, $A \subset B$ donc $x \in B$ d'où, $x \leq \sup(B)$ ce qui contredit $x > \sup(B)$ et finalement, $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Soient maintenant $x, y \in [0,1]$ tels que $x \leq y$, on a donc $[0,x] \subset [0,y]$ d'où, $\{f(t) \mid t \in [0,x]\} \subset \{f(t) \mid t \in [0,y]\}$, en appliquant ce qui précède, on obtient, que $\phi(x) \leq \phi(y)$ et par conséquent, ϕ est croissante sur $[0,1]$.

Pour la continuité, choisissons arbitrairement un réel $x_0 \in [0,1]$. Soit $\epsilon > 0$, comme f est continue en x_0 alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $|x - x_0| < \alpha$ implique que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ d'où, $f(x) < f(x_0) + \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $x \in [0,1]$ tel que $|x - x_0| < \alpha$.

Supposons dans un premier temps que $x < x_0$. On a, par conséquent, $|\phi(x_0) - \phi(x)| = \phi(x_0) - \phi(x) = \max(\phi(x), \sup\{f(t) \mid t \in [x, x_0]\}) - \phi(x)$ et d'après le lemme 2, on a $\phi(x_0) - \phi(x) = \max(0, \sup\{f(t) \mid t \in [x, x_0]\} - \phi(x))$.

Or, $t \in [x, x_0]$ implique que $|t - x_0| < \alpha$ et donc $f(t) < f(x_0) + \dfrac{\epsilon}{2}$ quelque soit $t \in [x, x_0]$, on conclut que $\sup\{f(t) \mid t \in [x, x_0]\} \leq f(x_0) + \dfrac{\epsilon}{2}$.

Finalement, par le lemme 3, $\phi(x_0) - \phi(x) \leq \max(0, f(x_0) + \dfrac{\epsilon}{2} - \phi(x)) = \max(0, f(x_0) - f(x) + f(x) + \dfrac{\epsilon}{2} - \phi(x)) = \max(0, f(x_0) - f(x) + \dfrac{\epsilon}{2} + f(x) - \phi(x))$. On a $f(x) - \phi(x) \leq 0$ et $f(x_0) - f(x) < \dfrac{\epsilon}{2}$, on conclut, par le lemme 3, que $\phi(x_0) - \phi(x) \leq \max(0, \epsilon) = \epsilon$.

Supposons maintenant que $x_0 \leq x$.

On a, par conséquent, $|\phi(x) - \phi(x_0)| = \phi(x) - \phi(x_0) = \max(\phi(x_0), \sup\{f(t) \mid t \in [x_0, x]\}) - \phi(x_0)$ et d'après le lemme 2, on a $\phi(x) - \phi(x_0) = \max(0, \sup\{f(t) \mid t \in [x_0, x]\} - \phi(x_0))$.

Or, $t \in [x_0, x]$ implique que $|t - x_0| < \alpha$ et donc $f(t) < f(x_0) + \dfrac{\epsilon}{2}$ quelque soit $t \in [x_0, x]$, on conclut que $\sup\{f(t) \mid t \in [x_0, x]\} \leq f(x_0) + \dfrac{\epsilon}{2}$.

Finalement, par le lemme 3, $\phi(x) - \phi(x_0) \leq \max(0, f(x_0) + \dfrac{\epsilon}{2} - \phi(x_0))$. On a $f(x_0) - \phi(x_0) \leq 0$, on conclut, par le lemme 3, que $\phi(x) - \phi(x_0) \leq \max(0, \dfrac{\epsilon}{2}) \leq \epsilon$.

On conclut que, pour tout $x_0 \in [0, 1]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|x - x_0| < \alpha$ implique que $|\phi(x_0) - \phi(x)| \leq \epsilon$.

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{1}{n}$. On a $g_n(0) = -\dfrac{1}{n} < 0$ De plus, $g_n(x) = x(\dfrac{e^x}{x} - 1) - 1 - \dfrac{1}{n}$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$. Du fait que, $\dfrac{e^x}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on déduit que $g_n(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc qu'il existe $\bar{x_n} > 0$ tel que $g_n(\bar{x_n}) > 0$. Comme, g_n est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe $u_n \in]0, \bar{x_n}[$ tel que $g_n(u_n) = 0$. La fonction g_n est de plus dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et a pour fonction dérivée $g_n'(x) = e^x - 1$, pour $x \in \mathbb{R}$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On conclut que g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc injective sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où l'unicité du réel u_n.
2. Posons pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^x - x$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, de plus, h a pour dérivée, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où, h strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Comme $n' \geq n$ implique que $1 + \dfrac{1}{n'} \leq \dfrac{1}{n}$ alors $h(u_{n'}) \leq h(u_n)$.

   Or, pour toute fonction f strictement croissante, $f(x) \leq f(y)$ implique que $x \leq y$. On en déduit que $n' \geq n$ implique que $u_{n'} \leq u_n$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Comme les termes de la suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement positifs, alors la suite est minorée par 0, on conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \geq 0$. Par continuité de h, on a $h(u_n)$ tend vers $h(l)$, mais comme, $h(u_n) = 1 + \dfrac{1}{n}$, par unicité de la limite, l vérifie $h(l) = 1$. La fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc injective sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc le réel l tel que $h(l) = 1$ est unique. Comme $h(0) = e^0 - 0 = 1$ alors $l = 0$.

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ en tant que fonction polynôme. De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 4x + 1 > 0$ et donc f_n est strictement

croissante sur $[0,1]$ donc injective sur $[0,1]$. On a, en outre, que, $f_n(0) = -1$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$. La fonction f_n étant dérivable sur $[0,1]$ est continue sur cet intervalle, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Finalement, l'injectivité de f entraine l'unicité du réel x_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0,1]$, $f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$. Comme $x \in [0,1]$, $1 - x \geq 0$ et $x^n \geq 0$. D'où, $f_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$. Dans l'inégalité précédente, on prend $x = x_n$ et on a $0 = f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_n)$. On a donc : $f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_n)$ et comme, f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ alors $x_{n+1} \geq x_n$. et par conséquent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à valeurs dans $]0, \frac{1}{2}[$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, elle converge vers un réel $l \in [0, \frac{1}{2}]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$, on en déduit, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que $0 < x_n^n \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème d'encadrement, on obtient que la limite de $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ existe et vaut 0. La fonction polynômiale $x \mapsto 2x^2 + x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $2x_n^2 + x_n - 1$ tend vers 0 et par unicité de la limite l satisfait $2l^2 + l - 1 = 0$ et $l \in [0, \frac{1}{2}]$. Le discriminant du polynôme $2X^2 + X - 1$ vaut $1 - 4 \times -2 = 9$. Le polynôme admet deux racines conjuguées : $X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = -1$. La limite l est l'unique racine de $2X^2 + X - 1$ appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$ donc $l = \frac{1}{2}$.

Exercice 12

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \max(-x, x)$, la fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$ en tant que maximum de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ cf. Exercice 8. Cependant pour $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|x|}{x} = 1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$. La limite à gauche de $\dfrac{|x|}{x}$ en 0 existe et vaut -1 et la limite à droite $\dfrac{|x|}{x}$ en 0 existe et vaut 1, ce qui prouve que f n'est pas dérivable en 0.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$, on en déduit que $0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème d'encadrement, la limite de $|g(x)|$ en 0 existe et vaut $0 = g(0)$, la fonction est donc continue en 0. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$, en tant produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$\frac{x\sin(x^{-1})}{x} = \sin x^{-1}$$
   Or quand x tend vers 0, x^{-1} tend vers $+\infty$ et $y \mapsto \sin(y)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, il suffit de considérer les suites définies par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $v_n = (2n+1)\pi$, ces deux suites tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ mais $(\sin u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 ($(\sin u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante) et $(\sin v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (car constante). On conclut que la fonction g n'est pas dérivable en 0.
2. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \cos(\sqrt{x})$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet un développement limité en 0 et il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $|x| \leq \alpha$, $\cos(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ où $x \mapsto \epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Comme $\sqrt{x}$ est continue en 0 et $\sqrt{0} = 0$ alors il existe $\beta > 0$, pour tout $0 < x \leq \beta$,
   $$\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{1 + \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + x\epsilon(x) - 1}{x} = \frac{1}{2} + \epsilon(x)$$

Comme $x \mapsto \epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 alors la limite de $\dfrac{\cos(\sqrt{x})-1}{x}$ en 0 existe et vaut $\dfrac{1}{2}$, par conséquent, h est dérivable en 0 et $h'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 13

Si la fonction f est constante (elle vaut forcément 0), alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et la dérivée est partout nulle sur $]0,+\infty[$, et il existe un réel $x_0 \in]0,+\infty[$ tel que $f'(x_0)=0$.

Supposons f non constante, il existe $x>0$ tel que $f(x_1)\neq 0$. On peut supposer que $f(x_1)>0$. Comme f admet 0 comme limite en $+\infty$ alors, en posant $\epsilon=\dfrac{f(x_1)}{2}>0$, il existe $A>0$ tel que $\forall\, x\in\mathbb{R}^+$, $x\geq A$ implique que $|f(x)|\leq\dfrac{f(x_1)}{2}$. En particulier, $x\geq A$ implique que $f(x_1)>f(x)$. De plus, f étant continue sur $[0,+\infty[$, elle continue sur l'intervalle fermé borné non vide $[0,A]$, et par conséquent, f atteint son maximum sur $]0,A[$ en un réel x_0 (on sait que $f(x_1)>0=f(0)$). La fonction f étant dérivable sur $]0,A[$, on a $f'(x_0)=0$.

Exercice 14

La fonction f est dérivable en a donc la limite : $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut $f'(a)<0$. Comme $f(a)=0$, on conclut que :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0.$$

Ce qui signifie que, pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta>0$, tel que, pour tout $x\in[a,b]$, $0<x-a<\eta$ implique que $\left|\dfrac{f(x)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right|<\epsilon$.

Prenons, $\epsilon=\dfrac{-f'(a)}{2}$, il existe $\eta>0$, tel que $0<x-a<\eta$, implique $\left|\dfrac{f(x)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right|<\frac{-f'(a)}{2}$ ce qui entraine $\dfrac{f(x)-f'(a)(x-a)}{x-a}<\dfrac{-f'(a)}{2}$ puis que $f(x)-f'(a)(x-a)<(x-a)\dfrac{-f'(a)}{2}$, on en déduit que $f(x)<(x-a)(f'(a)-\dfrac{f'(a)}{2})=(x-a)(\dfrac{f'(a)}{2})<0$.

Finalement, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $\forall x\in[a,b]$, $0<x-a<\eta \implies f(x)<0$. Prenons, $x_1\in]a,a+\eta[$ et $x_1<b$, on a donc $f(x_1)<0$.

Par ailleurs, la fonction f est dérivable en b donc la limite : $\displaystyle\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ existe et vaut $f'(b)<0$. Comme $f(b)=0$, on conclut que :

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f'(b)(x-b)}{x-b}=0.$$

Ce qui signifie que, pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta>0$, tel que, pour tout $x\in[a,b]$, $0<b-x<\eta$ implique que $\left|\dfrac{f(x)-f'(b)(b-x)}{b-x}\right|<\epsilon$.

Prenons, $\epsilon=\dfrac{-f'(b)}{2}$, il existe $\eta>0$, tel que $0<b-x<\eta$, implique $\left|\dfrac{f(x)-f'(b)(b-x)}{b-x}\right|<\dfrac{-f'(b)}{2}$ ce qui entraine $\dfrac{f(x)-f'(b)(b-x)}{b-x}>\dfrac{f'(b)}{2}$ puis que $f(x)-f'(b)(b-x)>(b-x)\dfrac{f'(b)}{2}$, on en déduit que $f(x)>(x-b)(f'(b)-\dfrac{f'(b)}{2})=(x-b)(\dfrac{f'(b)}{2})>0$.

Finalement, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $\forall x\in[a,b]$, $0<b-x<\eta \implies f(x)<0$. Prenons, $a<x_2\in]b-\eta,b[$, on a donc $f(x_2)>0$.

La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc continue sur $]x_1,x_2[$, $f(x_1)<0$ et $f(x_2)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in]x_1,x_2[$ tel que $f(c)=0$.

Exercice 15

Soit $\epsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x|<\alpha$ implique que $\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-l\right|<\epsilon$ qui équivaut à $|f(2x)-f(x)-lx|<\epsilon|x|$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $|x|<\alpha \implies \frac{|x|}{2^p}<\alpha$, d'où, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x|<\alpha$ implique que $\left|f\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^p}\right)-lx\right|<\epsilon\frac{|x|}{2^p}$.

Soit $|x|<\alpha$. Or $\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)-lx\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|=\left|\sum_{p=1}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^p}\right)-l\frac{x}{2^p}\right)\right|$.

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)-lx\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|\leq\sum_{p=1}^{n}\left|f\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^p}\right)-l\frac{x}{2^p}\right|$$

puis :

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)-lx\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|\leq\sum_{p=1}^{n}\epsilon\frac{|x|}{2^p}\leq\epsilon|x|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

Comme $n\geq1$, $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<1$ d'où, $\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)-lx\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|<\epsilon|x|$.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en 0 et donc $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ tend vers $f(0)$ quand n tend vers $+\infty$, de plus, $lx\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ tend vers lx quand n tend vers $+\infty$. Par continuité de la fonction valeur absolue, $\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)-lx\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|$ tend vers $|f(x)-f(0)-lx|$ quand n tend vers $+\infty$, l'inégalité large passant à la limite on obtient,

Pour tout $\epsilon>0$, il existe $\alpha>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x|<\alpha$ implique que $|f(x)-f(0)-lx|<\epsilon|x|$ ce qui équivaut à $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=l$ et donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=l$.

Exercice 16

La fonction f est dérivable en 0 alors, il existe $\alpha>0$, tel que pour tout $x\in]-\alpha,\alpha[$:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+x\epsilon(x)$$

Soit $k\in\mathbb{N}$. Il existe, $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $k\leq N$, on a, pour tout $n\geq N$, donc $0\leq\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}$. Par le théorème de comparaison, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geq N$, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$ $\frac{k}{n^2}\in]-\alpha,\alpha[$ et donc, pour $n\geq N$, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$:

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}f'(0)+\frac{k}{n^2}\epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

puis en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$, d'où, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$ puis que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{f'(0)}{2}$.

Soit maintenant $\eta > 0$, par définition de la fonction ϵ, il existe $\beta > 0$, tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \beta \implies |\epsilon(x)| < \eta$. Prenons $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, soit $n \in N$ tel que $\left|\frac{k}{n^2}\right| < \gamma$ implique que $\left|\epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \eta$. Ceci implique que, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \left|\epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \eta\frac{n+1}{2n} \leq \eta$$

car $n \in \mathbb{N}^*$.

En résumé, pour tout $\eta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geq N \implies \text{ pour tout } k \leq n, \ \left|\frac{k}{n^2}\right| < \gamma \implies \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \eta$$

que l'on peut réécrire :

$$\forall \eta > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ n \geq N \implies \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \eta$$

On conclut que, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Finalement, la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ existe en tant que somme de suites convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{k}{n^2} f'(0) + \lim_{n\to+\infty} \frac{k}{n^2} \epsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2} + 0 = \frac{f'(0)}{2}$$

Exercice 17

1. Soit $\epsilon > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > B \implies |f'(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$. La fonction $x :\mapsto f(x) - lx$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[B, x]$ pour tout $x > B$. Soit $x > B$, il existe $c \in]x, B[$ tel que

   $$|f(x) - lx - (f(B) - lB| = |f'(c) - l|(x - B).$$

   Comme $c \in]x, B[$, on a $|f'(c) - l| < \frac{\epsilon}{2}$, on en déduit que $|f(x) - lx - (f(B) - lB)| < \frac{\epsilon}{2}(x - B)$.
   De plus,
   $\displaystyle\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| = \frac{|f(x) - lx|}{x} = \frac{|f(x) - lx - (f(B) - lB) + (f(B) - lB)|}{x}$.
   Et par l'inégalité triangulaire,
   $\displaystyle\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| \leq \frac{|f(x) - lx - (f(B) - lB)|}{x} + \frac{|(f(B) - lB)|}{x} \leq \frac{\epsilon(x - B)}{2x} + \frac{|(f(B) - lB)|}{x}$.

Or, $B > 0$ ce qui implique que $x - B < x$ ce qui entraine $\dfrac{(x-B)}{x} < 1$. On en déduit que $\left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{|(f(B) - lB)|}{x}$.

Par ailleurs, $\dfrac{|(f(B) - lB)|}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il existe $B' > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > B' \implies \dfrac{|(f(B) - lB)|}{x} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Finalement, en posant $A = \max(B, B')$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > A \implies \left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| < \epsilon$.

2. Soit $A > 0$, il existe $B > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > B \implies f'(x) \geq A + 1$.
   Soit $x > B$, $f(x) - f(B) = \int_B^x f'(x)dx \geq (x - B)(A + 1)$. $\dfrac{f(x)}{x} \geq \dfrac{x(A+1)}{x} + \dfrac{f(B)}{x} - \dfrac{B(A+1)}{x} = A + 1 + \dfrac{f(B) - (A+1)}{x}$. Or $\dfrac{f(B) - (A+1)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il existe $B' > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > B' \implies \dfrac{f(B) - (A+1)}{x} \geq -1$. Soit $x > \max(B, B')$, on a $\dfrac{f(x)}{x} > A$ comme A est arbitraire, ceci implique que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 18

La fonction à étudier est en fait, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - \frac{1}{2}K(x - a)(x - b)$. Or $g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) - \frac{1}{2}K(a - a)(a - b) = 0$. De plus, $g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) - \frac{1}{2}K(b - a)(b - b) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$.

Soit $c \in]a, b[$, on veut trouver K tel que $g(c) = 0$. $g(c) = 0 \iff f(c) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c - a) - \frac{1}{2}K(c-a)(c-b) = 0 \iff f(c)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a) = \frac{1}{2}K(c-a)(c-b)$. Comme $c \in]a, b[$, $c - a \neq 0$ et $c - b \neq 0$, on peut diviser par $(c - a)(c - b)$. On a donc $K = \dfrac{2}{(c-a)(c-b)} f(c) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c - a)$.

Finalement, on a $g(a) = 0$, $g(c) = 0$ et $g(b) = 0$, on a d'après le théorème de Rolle, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors g est de classe $\mathcal{C}^2$, il existe $c_1 \in]a, c[$ et $c_2 \in]c, b[$ tels que $g'(c_1) = 0$ et $g'(c_2) = 0$. Comme f' est $\mathcal{C}^1$ alors g' est $\mathcal{C}^1$ et d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]c_1, c_2[\subset]a, b[$, $g''(d) = 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = f''(x) - K$ d'où, $g''(d) = 0$ c'est à dire que $f''(d) = K$.

Finalement, comme $g(c) = 0$, on a $f(c) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c - a) - \frac{1}{2}f''(d)(c - a)(c - b) = 0$ en d'autres termes, $f(c) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c - a) + \frac{1}{2}f''(d)(c - a)(c - b)$.

Exercice 19

On va montrer par récurrence que, pour tout entier n non nul, pour toute fonction f n fois continuement dérivable qui s'annule en $n+1$ points de $[a, b]$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Initialisation Soit f de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$. La proposition est vraie pour le rang initial $n = 1$.

Hérédité On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$, qui s'annule en $n + 1$ points, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$ et montrons que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, qui s'annule en $n + 2$ points, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en $n+2$ points. On pose, $g(x) = f'(x)$, pour tout $x \in]a,b[$. Puisque f s'annule en $n+2$ points que l'on note $x_1, \dots, x_{n+2}$, g s'annule en $n+1$ points. Pour le voir, on applique le théorème de Rolle sur, le intervalles $[x_i, x+1]$ avec $i = 1, \dots, n+1$. De plus, g est de classe $\mathcal{C}^n$. On peut donc appliquer notre hypothèse de récurrence à g, et il existe donc un réel x_0 tel que $g^{(n)}(x_0) = 0$. Or $0 = g^{(n)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$. L'hérédité est ainsi démontrée.

Conclusion La proposition est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 20

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable et que

$$\forall\, x \in]-1,1[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

avec, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$P_0(x) = 1, \qquad P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (2n+1)xP_n(x).$$

Initialisation Pour $n = 0$. La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{0+\frac{1}{2}}}.$$

De plus, $P_0(x) = 1$, pour tout $x \in]-1,1[$ et donc on a bien, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ pour tout $x \in]-1,1[$, pour $n = 0$.

Hérédité On suppose qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$, tel que, $f^{(n)}$ soit dérivable et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ avec, P_n défini par, pour tout $x \in]-1,1[$,$P_0(x) = 1$ et $P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (2n+1)xP_n(x)$. Montrons que $f^{(n+1)}$ est dérivable et que $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}$, pour tout $x \in]-1,1[$.

Comme $f^{(n)}$ est dérivable sur $]-1,1[$ alors $f^{(n+1)}(x)$ existe pour tout $x \in]-1,1[$ et

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}} + 2x(n+\frac{1}{2})(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}P_n(x)}{(1-x^2)^{2n+1}}.$$

ou encore :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}((1-x^2)P_n(x) + (2n+1)xP_n(x))}{(1-x^2)^{2n+1}}.$$

Or, par définition de P_n, on a $(1-x^2)P_n(x) + (2n+1)xP_n(x) = P_{n+1}(x)$ quelque soit $x \in]-1,1[$. De plus, $(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-(2n+1)} = (1-x^2)^{\frac{2n-1-4n-2}{2}} = (1-x^2)^{\frac{-2n-3}{2}} = (1-x^2)^{-n-1-\frac{1}{2}}$ quelque soit $x \in]-1,1[$. On conclut que :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(1-x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}}.$$

Par ailleurs, $f^{(n+1)}$ est dérivable en tant que quotient de fonctions de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion La proposition est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21

1. Supposons qu'il existe un entier n non nul tel que $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ soit rationnel. Le nombre $\dfrac{n\sqrt{2}}{n}$ serait donc rationnel mais $\dfrac{n\sqrt{2}}{n} = \sqrt{2}$, qui est irrationnel. On conclut que, pour tout entier n non nul $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel.
2. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}$ est rationnel alors $\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et vaut 1. D'après 1, pour tout entier n non nul $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$. La suite $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
3. Les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini mais $\left(f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et $\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1. On conclut que f n'est pas continue en 0.

Exercice 22

1. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$, on conclut que f est strictement décroissantesur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x} - 1 < 0$, par conséquent, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction f étant strictement décroissante et continue, $f([2, e^2]) = [f(e^2), f(2)] = [4 - \ln(e^2), 4 - \ln(2)]$. Or la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante donc $\ln(1) < \ln(2)$ d'où, $4 - \ln(2) < 4 - \ln(1) = 4]$. De plus, comme $2 < e < 3$ et que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors $4 < e^2$. On conclut que : $f([2, e^2]) \subset [2, 4] \subset [2, e^2]$. L'intevalle $[2, e^2]$ est par conséquent stable par f.
3. On a $g(2) = 4 - \ln(2) - 2 = 2 - \ln(2) = \ln(e^2) - \ln(2) > 0$ car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante. De plus, $g(e^2) = 4 - \ln(e^2) - e^2 = 4 - 2 - e^2 = 2 - e^2 < 0$ car $e^2 > 4 > 2$. La fonction g étant continue sur $[2, e^2]$, par ailleurs, $g(2) > 0$ et $g(e^2) < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $l \in [2, e^2]$ tel que $g(l) = 0$. En outre, g est strictement décroissante, elle est donc injective, d'où l'unicité de l.
4. (a) Soit $x \in [2, e^2]$, $|f'(x)| = \dfrac{1}{x}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[2, e^2]$, on a donc $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$. Le réel x étant arbitrairement choisi dans $[2, e^2]$, on conclut que, pour tout $x \in [2, e^2]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a $\forall\, x \in [2, e^2]$, $\forall\, y \in [2, e^2]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$
5. (a) Le terme initial de la suite appartient $[2, e^2]$ et l'intervalle $[2, e^2]$ étant stable par f, tous les termes de la suite appartiennent à $[2, e^2]$ et sont donc strictement positifs par conséquent la suite est bien définie et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2, e^2]$.

   (b) On va montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $|u_n - l| \leq 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Initialisation Pour tout $x, y \in [2, e^2]$, $|x-y| \leq e^2 - 2 \leq 9 - 2 = 7$. Or $u_0, l \in [2, e^2]$, on a donc $|u_0 - l| \leq 7 = 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ pour $n = 0$. La proposition est vraie au rang initial $n = 0$.

Hérédité On suppose que la proposition est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire $|u_{n+1} - l| \leq 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
Comme $g(l) = 0$ ce qui équivaut à $f(l) = l$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, on a d'après 4., $|u_{n+1} - l| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - l|$, or par hypothèse de récurrence, on a $|u_n - l| \leq 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
On conclut que : $|u_{n+1} - l| \leq 7\dfrac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
La proposition est donc héréditaire.

Conclusion La proposition est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a finalement, pour tout entier naturel n, $|u_n - l| \leq 7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

(c) la suite, $\left(7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, elle tend vers 0. Par le théorème d'encadrement, on conclut que la suite, $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, ce qui équivaut à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le réel l.

(d) Il suffit d'abord de fixer $u_0 \in [2, e^2]$. Il faut trouver un entier n tel que $7\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 10^{-2}$ i.e $\dfrac{2^n}{7} \geq 100$ i.e $2^n \geq 700$. En prenant le logarithme népérien, on obtient, $n \geq E(\dfrac{\ln(700)}{\ln(2)}) + 1 = 10$. En calculant u_{10} on obteint une approximation de l à 10^{-2}.