

Devoir Maison

Nombres réels, Suites et Fonctions

Problème : Projection sur un rectangle

1 Un exemple

Exercice 1 (Préliminaires)

1. La projection de $(3, 3)$ sur C n'est pas orthogonale.
2. La projection de $(0, 3)$ sur C est pas orthogonale.
3. Pour que la projection de (x, y) soit orthogonale, il faut que x ou (exclusif) y appartienne à $[-2, 2]$.
4. Pour que la projection de (x, y) ne soit pas orthogonale, il faut que x et y n'appartiennent pas à $[-2, 2]$.
5. Pour $X \in C$, $P_C(X) = X$.
6. Si $X \notin C$. Soit $Y \in C$ tel que $Y \in (XP_C(X))$ et Y soit sur un côté de C . On a $XY = XP_C(X) + P_C(X)Y$. Si $Y \neq P_C(X)$, $XY > XP_C(X)$, ce qui implique que $P_C(X)$ doit être sur un côté de C .

2 Un peu d'analyse

Exercice 2 (Réduction du problème)

1. La somme de carré étant positive alors la racine carrée existe et donc $X \mapsto d(X, X')$ est bien définie.
2. Soit $X' = (x', y')$.
 - (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - x')^2 \geq 0$, ce qui signifie que $x \mapsto (x - x')^2$ est minorée.
 - (b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $(y - y')^2 \geq 0$, ce qui signifie que $y \mapsto (y - y')^2$ est minorée.
 - (c) Comme $(a_1 - x')^2 \in \mathcal{A}_1(x')$ et $(a_2 - x')^2 \in \mathcal{A}_2(y')$, les ensembles $\mathcal{A}_1(x')$, $\mathcal{A}_2(y')$ et $\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')$ sont non-vides.
Soit $z \in \mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')$, il existe $z_1 \in \mathcal{A}_1(x')$ et $z_2 \in \mathcal{A}_2(y')$ tel que $z = z_1 + z_2$. Or $\mathcal{A}_1(x')$ et $\mathcal{A}_2(x')$ sont minorés alors il existe $m_1 \in \mathbb{R}$ et $m_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z_1 \geq m_1$ et $z_2 \geq m_2$ et donc $z \geq m_1 + m_2$.
Le réel z étant arbitrairement choisi alors $\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')$ est minoré.

- (d) On a, pour $z_1 \in \mathcal{A}_1(x')$ et $z_2 \in \mathcal{A}_2(y')$, $z_1 \geq m_1$ et $z_2 \geq m_2$ implique que $z_1 + z_2 \geq m_1 + m_2$. On a donc, en posant $m_1 = \inf(\mathcal{A}_1(x'))$ et $m_2 = \inf(\mathcal{A}_2(y'))$, $\inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y')) \leq \inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))$.
Soient $z_1 \in \mathcal{A}_1(x')$ et $z_2 \in \mathcal{A}_2(y')$, on a $z_1 + z_2 \geq \inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))$ et donc $z_1 \geq \frac{\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))}{2}$ et $z_2 \geq \frac{\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))}{2}$, comme z_1 et z_2 sont arbitrairement choisis alors $\frac{\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))}{2}$ est un minorant de $\mathcal{A}_1(x')$ et de $\mathcal{A}_2(y')$ et donc $\frac{\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))}{2} \leq \inf(\mathcal{A}_1(x'))$ et $\frac{\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y'))}{2} \leq \inf(\mathcal{A}_2(y'))$ d'où, $\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')) \leq \inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y'))$. Grâce aux deux inégalités, $\inf(\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')) = \inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y'))$.
- (e) On a $(a_1 - x')^2 + (a_2 - y')^2 \in \mathcal{A}(x', y')$ et donc $\mathcal{A}(x', y')$ est non-vide.
Soient $z_1 \in \mathcal{A}_1(x')$ et $z_2 \in \mathcal{A}_2(y')$ alors il existe $x_1 \in [a_1, b_1]$ et $x_2 \in [a_2, b_2]$ tels que $z_1 = (x_1 - x')^2$ et $z_2 = (x_2 - y')^2$ d'où, $z_1 + z_2 = (x_1 - x')^2 + (x_2 - y')^2$ avec $x_1 \in [a_1, b_1]$ et $x_2 \in [a_2, b_2]$, on conclut que $z_1 + z_2 \in \mathcal{A}(x', y')$ et par conséquent $\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y') \subset \mathcal{A}(x', y')$.
Soit $z \in \mathcal{A}(x', y')$, il existe $x_1 \in [a_1, b_1]$ et $x_2 \in [a_2, b_2]$ tels que $z = (x_1 - x')^2 + (x_2 - y')^2$ d'où, il existe $x_2 \in [a_2, b_2]$ tel que $z - (x_1 - x')^2 = (x_2 - y')^2$ et donc $z - (x_1 - x')^2 \in \mathcal{A}_2(y')$. De plus, il existe $x_1 \in [a_1, b_1]$ tel que $z - (x_2 - y')^2 = (x_1 - x')^2$ et donc $z - (x_2 - y')^2 \in \mathcal{A}_1(x')$ finalement $z \in \mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')$ d'où, $\mathcal{A}(x', y') \subset \mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y')$.
Par double inclusion, on conclut que $\mathcal{A}_1(x') + \mathcal{A}_2(y') = \mathcal{A}(x', y')$. Par conséquent, $\inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y')) = \inf(\mathcal{A}(x', y'))$.
- (f) La première équivalence vient de la stricte croissance de la fonction racine carrée. S'il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que $(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 \leq (x - x')^2 + (y - y')^2$ pour tout $x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]$ alors $(x_0 - x')^2 \leq (x - x')^2$ pour tout $x \in [a_1, b_1]$ et $(y_0 - y')^2 \leq (y - y')^2$ pour tout $y \in [a_2, b_2]$, par conséquent, $\inf(\mathcal{A}_1(x')) = (x_0 - x')^2$ et $\inf(\mathcal{A}_2(y')) = (y_0 - y')^2$ et donc $\inf(\mathcal{A}(x', y')) = \sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2} = \sqrt{\inf(\mathcal{A}_1(x')) + \inf(\mathcal{A}_2(y'))}$.

Exercice 3 (Existence)

- Supposons que $u \notin [a_1, b_1]$. On suppose $u > b_1$, ($u < a_1$ se montre de la même manière). Soit $\epsilon > 0$ (par exemple, $\epsilon = \frac{u-b_1}{2}$) tel que $u - \epsilon > b_1$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u alors il existe $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |u_n - u| < \epsilon$. Soit $n \geq N$, on a $|u_n - u| < \epsilon$ d'où, $u - u_n < \epsilon$ puis $b_1 < u - \epsilon < u_n$ ceci contredit le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a_1, b_1]$.
- Si $x' \in [a_1, b_1]$ alors $0 \leq \inf(\mathcal{A}_1(x')) \leq (x' - x')^2 = 0$. Maintenant, si $\inf(\mathcal{A}_1(x')) = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [a_1, b_1]$, tel que $0 \leq (x_n - x')^2 \leq \frac{1}{n^2}$, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 \leq |x_n - x'| = \sqrt{(x_n - x')^2} \leq \frac{1}{n}$. D'où, par le théorème de comparaison $(|x_n - x'|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x' et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [a_1, b_1]$ on a d'après 1 que $x' \in [a_1, b_1]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_n \in [a_1, b_1]$ tel que $\inf(\mathcal{A}_1(x')) \leq (z_n - x')^2 \leq \inf(\mathcal{A}_1(x')) + \frac{1}{n}$. Par le théorème de comparaison, la suite $((z_n - x')^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf(\mathcal{A}_1(x'))$.
- D'après 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in [a_1, b_1]$, la suite est donc dans un intervalle fermé borné non vide, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite de

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge dans $[a_1, b_1]$. Il existe $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ strictement croissante et $x^* \in [a_1, b_1]$ telle que $(z_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x^* . Par continuité de la fonction racine carrée on a $((z_{\phi(n)} - x')^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $(x^* - x')^2$. Or $((z_{\phi(n)} - x')^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'après 3, converge, en tant que sous-suite, vers $\inf(\mathcal{A}_1(x'))$ et par unicité de la limite $(x^* - x')^2 = \inf(\mathcal{A}_1(x'))$.

Exercice 4 (Unicité)

- On a $x_1^* \in [a_1, b_1]$ et $x_2^* \in [a_1, b_1]$ et donc $a_1 \leq x_1^* \leq b_1$ et $a_1 \leq x_2^* \leq b_1$ d'où, $\frac{a_1}{2} \leq \frac{x_1^*}{2} \leq \frac{b_1}{2}$ et $\frac{a_1}{2} \leq \frac{x_2^*}{2} \leq \frac{b_1}{2}$ puis $\frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} \leq \frac{x_1^*}{2} + \frac{x_2^*}{2} \leq \frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2}$. On conclut que $a_1 + a_1 \leq \frac{x_1^*}{2} + \frac{x_2^*}{2} \leq b_1$.
- (a) $0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ d'où $2ab \leq a^2 + b^2$. On a donc $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$.
 (b) $(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2) \iff 2(a^2 + b^2) - a^2 - b^2 - 2ab = 0 \iff a^2 + b^2 - 2ab = 0 \iff (a - b)^2 = 0 \iff a = b$.
- D'après 1, comme $\frac{x_1^* + x_2^*}{2} \in [a_1, b_1]$ alors $\inf(\mathcal{A}_1(x')) \leq \left(\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - x'\right)^2$. De plus, $\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - x' = \frac{x_1^* - x'}{2} + \frac{x_2^* - x'}{2}$, donc en appliquant 2(a), avec $a = \frac{x_1^* - x'}{2}$ et $b = \frac{x_2^* - x'}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - x'\right)^2 &\leq 2 \left(\left(\frac{x_1^* - x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2^* - x'}{2}\right)^2 \right) \\ &\leq 2 \left(\left(\frac{1}{4}\right) (x_1^* - x')^2 + \left(\frac{1}{4}\right) (x_2^* - x')^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (x_1^* - x')^2 + \frac{1}{2} (x_2^* - x')^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $(x_1^* - x')^2 = (x_2^* - x')^2 = \inf(\mathcal{A}_1(x'))$ et donc $\left(\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - x'\right)^2 = \frac{1}{2} \inf(\mathcal{A}_1(x')) + \frac{1}{2} \inf(\mathcal{A}_1(x')) = \inf(\mathcal{A}_1(x'))$.

Par conséquent on a $\left(\frac{x_1^* + x_2^*}{2} - x'\right)^2 = 2 \left(\left(\frac{x_1^* - x'}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2^* - x'}{2}\right)^2 \right)$, d'après 2(b), on a $\frac{x_1^* - x'}{2} = \frac{x_2^* - x'}{2}$ ce qui équivaut à $x_1^* - x' = x_2^* - x'$ qui est équivalent à $x_1^* = x_2^*$.

Exercice 5 (Continuité)

- La fonction $z \mapsto z - x_0$ est continue sur l'intervalle fermé borné non vide $[a_1, b_1]$ et donc elle est majorée sur cet intervalle.
- Soit $z \in [a_1, b_1]$, on a $\inf(\mathcal{A}_1(x')) \leq (z - x')^2$. Or $(z - x')^2 \leq (|z - x_0| + |x_0 - x'|)^2 = (z - x_0)^2 + (x_0 - x')^2 + 2|x_0 - x'| |z - x_0| \leq (z - x_0)^2 + (x_0 - x')^2 + 2M|x_0 - x'|$ d'où $\inf(\mathcal{A}_1(x')) \leq (z - x_0)^2 + (x_0 - x')^2 + 2M|x_0 - x'|$ et donc $\inf(\mathcal{A}_1(x')) - (x_0 - x')^2 - 2M|x_0 - x'| \leq (z - x_0)^2$.
- Dans la question précédente, on a montré que $\inf(\mathcal{A}_1(x')) - (x_0 - x')^2 - 2M|x_0 - x'|$ était un minorant de $\mathcal{A}_1(x_0)$ et comme $\inf(\mathcal{A}_1(x_0))$ le plus grand des minorants, on a $\inf(\mathcal{A}_1(x')) - (x_0 - x')^2 - 2M|x_0 - x'| \leq \inf(\mathcal{A}_1(x_0))$ d'où, $\inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0)) \leq (x_0 - x')^2 + 2M|x_0 - x'|$.
- Soit $\epsilon > 0$, si $|x_0 - x'| \leq \min\{\frac{\epsilon}{4M}, \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\}$ alors $\inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0)) \leq \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\right)^2 + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
- Il suffit de partir de $\inf(\mathcal{A}_1(x_0)) \leq (z - x_0)^2$.

6. On a

$$|\inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0))| = \max\{\inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0)), \inf(\mathcal{A}_1(x_0)) - \inf(\mathcal{A}_1(x'))\}$$

d'où, $|x_0 - x'| \leq \min\{\frac{\epsilon}{4M}, \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}\}$ implique que $|\inf(\mathcal{A}_1(x')) - \inf(\mathcal{A}_1(x_0))| \leq \epsilon$. On conclut que la fonction $x' \mapsto \inf(\mathcal{A}_1(x'))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Calculs

Exercice 6 (Solutions)

Premièrement, les quatre bords du rectangle s'écrivent : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, b_1], y = b_2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, b_1], y = a_2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a_2, b_2], x = a_1\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a_2, b_2], x = b_1\}$.

1. Si $x' \in [a_1, b_1]$, alors la première coordonnée de $P_C(X')$ est x' . Maintenant comme $P_C(X')$ appartient au bord de C alors on a soit $P_C(X') \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, b_1], y = b_2\}$ soit $P_C(X') \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, b_1], y = a_2\}$. Si $y' > b_2$ on a $y' - a_2 > y' - b_2 > 0$ et par conséquent en élevant au carré on a $(y' - a_2)^2 > (y' - b_2)^2$ et donc $P_C(X') = (x', b_2)$. Si $y' < a_2$ on a $b_2 - y' > a_2 - y' > 0$ et par conséquent, $(y' - b_2)^2 > (y' - a_2)^2$ et $P_C(X') = (x', a_2)$. Si $y' \in [a_2, b_2]$, on a $X' \in C$ donc $P_C(X') = X'$.
2. On raisonne comme dans la question précédente.
3. On minimise séparément sur $[a_1, b_1]$ et sur $[a_2, b_2]$. Soient $x < b_1$ et $y < b_2$ on a $x' - x > x' - b_1 > 0$ et $y' - y > y' - b_2 > 0$ par conséquent, $(x' - x)^2 > (x' - b_1)^2 > 0$ et $(y' - y)^2 > (y' - b_2)^2 > 0$ et donc $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 > (x' - b_1)^2 + (y' - b_2)^2$. On conclut que $P_C(X') = (b_1, b_2)$.