

Epreuve d'entraînement 3. Durée 1 heure.

Mardi 18 Mai

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.

Lire bien attentivement TOUT l'énoncé.

Questions de cours

1. Énoncer la première formule de la moyenne pour les intégrales.
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

On veut montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$, $f(x_0) = x_0$.

1. Montrer que :

$$\int_0^1 (f(x) - x)dx = 0$$

2. Montrer que si, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) - x \geq 0$ alors, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$, en déduire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$, $f(x_0) = x_0$.
3. On suppose maintenant qu'il existe $x_1 \in [0, 1]$ tel que $f(x_1) - x_1 > 0$ et qu'il existe $x_2 \in [0, 1]$ tel que $f(x_2) - x_2 < 0$. Montrer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

On suppose que :

$$b > 0, c > 0, b - c > 0$$

On définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^{2n} + bx^2 - cx + 1$$

Partie I

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^2$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $bx^2 - cx + 1 > 1 - \frac{(c+1)^2}{4b}$.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) > 1 - \frac{(c+1)^2}{4b}$. Que peut-on conclure sur les fonctions f_n ?

Partie II

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $f'_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f'_n est strictement croissante. En déduire que x_n est l'unique solution de l'équation $f'_n(x) = 0$.
3. Montrer que le minimum de f_n est atteint en x_n .
Indication : Utiliser f'_n strictement croissante, en déduire les variations de f_n puis conclure.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_{n+1}(x) \leq f'_n(x)$.
5. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et conclure que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
On pourra utiliser que, pour une fonction h strictement croissante, $h(x) \leq h(y) \implies x \leq y$.
6. Montrer que $(2x_n^{2n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et en déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{c}{2b}$.

Questions bonus

1. Que peut-on dire, à n fixé, sur l'ensemble des minimas de f_n ?
2. Quel réel réalise le minimum de la fonction $x \mapsto bx^2 - cx + 1$?
3. Que conclut-on sur la construction du minimum de $x \mapsto bx^2 - cx + 1$?