UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure.

Mardi 13 Avril

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : ***tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect****.*

Questions de Cours

1. Enoncer le théorème des suites adjacentes.
2. Donner la définition, avec les quantificateurs, d'une suite non bornée.

Exercice 1

1. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, 4]$ est-il majoré ? Si oui donner, en justifiant, sa borne supérieure.
2. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, 4]$ est-il minoré ? Si oui, donner, en justifiant, sa borne inférieure.

Exercice 2

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$ puis $v_n \leq v_{n+1}$ et $u_{n+1} \leq u_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - v_n|$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in [-1, 1],\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 1]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $u_0 < 0$, strictement décroissante si $u_0 > 0$ et constante si $u_0 = 0$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

Exercice 4

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que $u_0 \in [0, 1]$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 - E(u_n))^{E(u_n)}$ où E désigne la partie entière.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.