Correction Epreuve d'entraînement 1.

Jeudi 4 Mars

Exercice 1

1. Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

2. Montrer que pour deux propositions P et Q , la proposition suivante est vraie :

$$(P \implies Q) \iff (\text{non } Q \implies \text{non } P).$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 5$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$.

Exercice 3

1. Rappeler la définition d'une application injective.
2. Rappeler la définition d'une application surjective.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application telle que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 5$.
 - (a) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(]0, +\infty[)$, $f(\{2\})$ et $f^{-1}(\{-10\})$.
 - (b) L'application f est-elle injective ? surjective ? (Justifier)
4. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application telle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z^2 + 3$.
L'application g est elle injective ? surjective ? (Justifier)

Exercice 4

Posons, pour n entier naturel non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^n (k^3(k-1)(k+1))$$

Le but de cet exercice est d'exprimer S_n en fonction de n .

1. Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2$$

Indication : On pourra utiliser 1.

4. Montrer, que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right)^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + \frac{3}{4} S_n$$

Indication : pour a et b réels, $(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$.

5. En déduire l'expression de S_n en fonction de n .