UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement 3. Durée 1 heure.

Mardi 18 Mai

Questions de cours

1. Donner la première formule de la moyenne :
   Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe $c \in]a, b[$ tel que
   $$f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)dt.$$
2. Enoncer le théorème des accroissements finis.
   Soit $[a, b]$ un intervalle. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Si f continue de $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :
   $$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

Exercice 1

1. Par linéarité de l'intégrale, on a :
   $$\int_0^1 (f(x) - x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$
2. Supposons que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) - x \geq 0$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto -x$ est aussi continue sur $[0, 1]$, la somme des deux fonctions est donc continue sur $[0, 1]$. De plus, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est supposée positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle est donc identiquement nulle sur $[0, 1]$ et donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) - x = 0$ ce qui équivaut à, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$. En prenant, $x = 1$, on a donc $f(1) = 1$ ce qui prouvel'existence d'un réel $x_0 \in [0, 1]$ telle que $f(x_0) = x_0$.
3. Supposons qu'il existe $x_1 \in [0, 1]$ et $x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) - x_1 > 0$ et $f(x_2) - x_2 < 0$. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0, 1]$ en tant que somme de fonctions continues sur $[0, 1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$ tels que $f(x_0) - x_0 = 0$ ce qui équivaut à $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^2$ en tant que polynôme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = \dfrac{1}{n} 0^{2n} + b \times 0^2 - c \times 0 + 1 = 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $bx^2 - cx + 1 > 1 - \dfrac{(c+1)^2}{4b} \iff bx^2 - cx + 1 - 1 + \dfrac{(c+1)^2}{4b} > 0 \iff bx^2 - cx + \dfrac{(c+1)^2}{4b} > 0$.
   Soit le polynôme P en X, $bX^2 - cX + \dfrac{(c+1)^2}{4b}$. Le polynôme P a pour discriminant $\delta = (-c)^2 - 4b \times \dfrac{(c+1)^2}{4b} = c^2 - (c+1)^2 = c^2 - c^2 - 2c - 1 = -2c - 1 < 0$ car $c > 0$ donc $-2c < 0$ et $-2c - 1 < 0$.
   Le polynôme P est donc du signe de b et est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. On conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $bx^2 - cx + \dfrac{(c+1)^2}{4b} > 0$ ce qui équivaut à $bx^2 - cx + 1 > 1 - \dfrac{(c+1)^2}{4b}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{1}{n}x^{2n} \geq 0$, par conséquent, $f_n(x) \geq bx^2 - cx + 1$ et d'après 2., $f_n(x) > 1 - \dfrac{(c+1)^2}{4b}$. On conclut que les fonctions f_n sont minorées par $1 - \dfrac{(c+1)^2}{4b}$.

Partie II

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1., f_n est $\mathcal{C}^2$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n'(x) = (2n)\frac{1}{n}x^{2n-1} + 2bx + c = 2x^{2n-1} + 2bx + c.$$
On a $f_n'(0) = c < 0$ d'après l'énoncé et $f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-2} + b + c > b + c > 0$ d'après l'énoncé. f_n étant $\mathcal{C}^2$, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et donc il existe $x_n \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $f_n'(x_n) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^2$, par conséquent f_n'' existe et, pour $x \in \mathbb{R}$:
$$f_n''(x) = 2(2n-1)x^{2(n-1)} + 2b.$$
Or $2(n-1)$ est pair donc $2(2n-1)x^{2(n-1)} \geq 0$ et d'après l'énoncé $b > 0$, on conclut que : $f_n''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc f_n' est strictement croissante, on en déduit que f_n' est injective et donc, par conséquent, x_n est l'unique solution de l'équation $f_n'(x) = 0$.
3. Comme f_n' est strictement croissante $f_n'(x) < 0, \forall x < x_n$ et $f_n'(x) > 0\ \forall x > x_n$, on en déduit que f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, x_n[$ et strictement croissante sur $]x_n, +\infty[$ d'où, $\forall x < x_n$, $f_n(x) > f_n(x_n)$ et $\forall x > x_n$, $f_n(x) > f_n(x_n)$ et en conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_n \implies f_n(x) > f_n(x_n)$ et x_n est l'unique minimiseur de f_n sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0, 1]$,
$$f_{n+1}'(x) - f_n'(x) = 2x^{2n+1} + 2bx + c - \left(2x^{2n-1} + 2bx + c\right) = 2x^{2n-1}\left(x^2 - 1\right)$$
Mais $x \in [0, 1]$ d'où, $2x^{2n-1} \geq 0$ et $x^2 - 1 \leq 0$, finalement, $f_{n+1}'(x) - f_n'(x) \leq 0$.
5. On en déduit que $f_{n+1}'(x_{n+1}) \leq f_n'(x_{n+1})$ ce qui implique que $0 = f_n'(x_n) \leq f_n'(x_{n+1})$ Mais, f_n' est strictement croissante donc $x_n \leq x_{n+1}$.
La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, par ailleurs, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$, par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < \dfrac{1}{2}$, on a, donc, $0 < 2x_n^{2n-1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2(n-1)}$. Par le théorème d'encadrement, on obtient que $2x_n^{2n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x_n) = 0$ ce qui est équivalent à $2x_n^{2n-1} + 2bx_n + c = 0$ qui est lui même équivalent à $2bx_n - c = -2x_n^{2n-1}$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l et $\left(-2x_n^{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par ailleurs la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x :\mapsto 2bx - c$ est continue donc $2bx_n - c$ converge vers $2bl - c$ quand n tend vers $+\infty$ et par unicité de la limite $2bl - c = 0$, et finalement $l = \dfrac{c}{2b}$. On remarque que $b - c > 0 \implies b > c$ ce qui implique, comme $c > 0$, que $0 < \dfrac{c}{b} < 1$ et finalement $0 < \dfrac{c}{2b} < \dfrac{1}{2}$.

Questions bonus

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des minima de f_n est un singleton car x_n est l'unique minimiseur de f_n, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $bx^2 - cx + 1 - (1 - \dfrac{c^2}{4b}) = bx^2 - cx + \dfrac{c^2}{4b}$. Or $bx^2 - cx + \dfrac{c^2}{4b} = bx^2 - 2\dfrac{c}{2b} \times (xb) + b\dfrac{c^2}{4b^2} = b\left(x^2 - 2\dfrac{c}{2b}x + \dfrac{c^2}{4b^2}\right) = b\left(x - \dfrac{c}{2b}\right)^2 \geq 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $bx^2 - cx + 1 \geq 1 - \dfrac{c^2}{4b}$ et

$bx^2 - cx + 1 = 1 - \dfrac{c^2}{4b}$ ssi $b\left(x - \dfrac{c}{2b}\right)^2 = 0$ ssi $x = \dfrac{c}{2b}$ donc le réel $\dfrac{c}{2b}$ est l'unique minimiseur de $x :\mapsto bx^2 - cx + 1$.

3. Pour approcher le minimiseur de $x :\mapsto bx^2 - cx + 1$, on a construit une nouvelle fonction grâce à la somme de la fonction et d'un élément positif dépendant du temps. On a extrait une suite de minimiseur qui converge vers la solution cherchée.