Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure.

Mardi 13 Avril

Questions de Cours

1. Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante), $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante) et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

   Théorème des suites adjacentes : Deux suites adjacentes convergent vers la même la limite.
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée si pour tout $M\in\mathbb{R}^+$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0}|\geq M$.

Exercice 1

1. Comme $3\in\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$ est non-vide. Pour tout $x\in\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, on a $x\leq 4$, 4 est donc un majorant de $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$. On conclut que $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$ est non-vide et majoré, cet ensemble admet donc une borne supérieure. Soit M un majorant de $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, comme $4\in\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, on a $4\leq M$, donc 4 est le plus petit majorant donc la borne supérieure de $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$.
2. Comme $3\in\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$ est non-vide, et pour tout $x\in\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, $\sqrt{2}\leq x$, $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$ est donc non-vide et minoré, cet ensemble admet donc une borne inférieure. Comme $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ et $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, mais par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $\epsilon>0$, il existe $x\in\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$, $\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}+\epsilon$, en outre, $\sqrt{2}$ est un minorant de $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$ alors $\sqrt{2}$ est la borne inférieure de $\mathbb{Q}\cap[\sqrt{2},4]$.

Exercice 2

1. On va montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition "$u_n>0$ et $v_n>0$".

   Initialisation :

   $n=0$. Par hypothèse, $u_0=a>0$ et $v_0=b>0$. $P(0)$ est donc vraie.

   Hérédité :

   Supposons que pour un certain $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$, montrons que $u_{n+1}>0$ et $v_{n+1}>0$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n>0$, $v_n>0$, d'où $u_nv_n>0$, et $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ existe et $u_{n+1}>0$, de plus, $u_nv_n>0$ et $u_n+v_n>0$ on déduit que $v_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$.

   On conclut que $P(n)$ vraie implique que $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion :

   $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n-v_n=\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}-\frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}}$$

$$\iff u_n-v_n=\frac{\sqrt{(u_{n-1}v_{n-1}}(u_{n-1}+v_{n-1})-2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1}+v_{n-1}}.$$

Or $\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(u_{n-1}+v_{n-1})-2u_{n-1}v_{n-1}=$

$$\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(u_{n-1}+v_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}})=\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{v_{n-1}})^2.$$

Finalement, $u_n - v_n = \dfrac{\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{u_{n-1}+v_{n-1}}$ et comme $(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 \geq 0$, $u_{n-1} > 0$ et $v_{n-1} > 0$ ceci implique que $u_{n-1} + v_{n-1} > 0$, $u_n - v_n \geq 0$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - v_n = \dfrac{2u_nv_n - v_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n} = \dfrac{2u_nv_n - v_nu_n - v_n^2}{u_n+v_n} = \dfrac{u_nv_n - v_n^2}{u_n+v_n} = \dfrac{v_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n}$, or on vient de montrer que $(u_n - v_n) \geq 0$ et $v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_nv_n} - u_n$, comme $u_n \geq v_n$, $u_n^2 \geq u_nv_n$ puis en utilsant la croissance de $x :\mapsto \sqrt{x}$, $u_{n+1} - u_n \leq \sqrt{u_nu_n} - u_n = u_n - u_n = 0$ on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = u_{n+1} - v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$$

$$\iff u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_nv_n}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n})}{u_n+v_n} = \frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n+v_n}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n})$$

Or $0 \leq (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}$ d'où $u_n + v_n \geq 2\sqrt{u_nv_n}$ puis $\dfrac{u_n+v_n}{\sqrt{u_nv_n}} \geq 2$ et enfin $\dfrac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n+v_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, comme, $u_n \geq v_n$ et que $v_n > 0$ on obtient que $u_nv_n \geq v_n^2$. Puis, par croissance de $x :\mapsto \sqrt{x}$, $\sqrt{u_nv_n} \geq v_n$ qui entraine que $-2\sqrt{u_nv_n} \leq -2v_n$. On en déduit que $0 \leq u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n} \leq u_n + v_n - 2v_n = u_n - v_n$.

Finalement,

$$\frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n+v_n} \leq \frac{1}{2}$$

et $u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n} \geq 0$ ce qui entraine :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n+v_n}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}) \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}) \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

4. On va montrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$.

Initialisation :
Comme $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$, $0 \leq |u_0 - v_0| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |u_0 - v_0|$ et donc la propriété au rang initial.

Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie au rang n i.e $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$ i.e $0 \leq |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - v_0|$.

D'après la question 3, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{|u_n - v_n|}{2}$, or par hypothèse de récurrence, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$ on en déduit que $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - v_0|$

Conclusion :
La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$.

Par le théorème de comparaison des suites, $|u_n - v_n|$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. De plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc d'après le théorème des suites adjacentes, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3

1. Soit $x \in [-1,1]$, on a donc $|x| \leq 1$. Comme $x^2 \geq 0$, on obtient que $|x| \leq 1 + x^2$ ou encore que $\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right| \leq 1$ puis que $\dfrac{x}{x^2+1} \in [-1,1]$. On conclut que $[-1,1]$ est stable par f. Comme $u_0 \in [-1,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1,1]$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Soit $x \in]-1,1[$,
   $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2x(x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Or $(x^2+1)^2 > 0$ et $1-x^2 > 0 \iff x \in]-1,1[$
   On conclut que, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$ et donc f est strictement croissante sur $]-1,1[$. De plus, si $x = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} < 1$ et si $x = -1$, $f(x) = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2} > -1$. On conclut que f est strictement croissante sur $[-1,1]$.
   On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. Pour trouver le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit d'étudier le signe de $u_1 - u_0$. Or $u_1 - u_0 = \dfrac{u_0}{u_0^2+1} - u_0 = \dfrac{u_0 - u_0^3 - u_0}{u_0^2+1} = \dfrac{-u_0^3}{u_0^2+1}$.
   On conclut que $u_1 - u_0$ est strictement négatif si $u_0 > 0$, strictement positif si $u_0 < 0$ et nul si $u_0 = 0$.
   On conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $u_0 > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissant si $u_0 < 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et décroissante donc constante si $u_0 = 0$.
4. Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc convergente et la limite vaut 0.
   Sinon, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (question 1), si $u_0 > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée et si $u_0 < 0$ est croissante et majorée. Dans ces deux cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   Soit l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
   Par ailleurs, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la limite vérifie $l = f(l)$ et $l \in [-1,1]$.
   Résolvons donc l'équation $l = f(l)$.
   $l = f(l) \iff l = \dfrac{l}{l^2+1} \iff l(l^2+1) = l \iff l^3 + l - l = 0 \iff l = 0.$
   En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

Premièrement supposons, $u_0 = 1$ et montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et que $u_{2n+1} = 0$.

Initialisation On pose $n = 0$. On doit donc montrer que, $u_1 = 0$. Comme $E(u_0) = u_0 = 1$, $u_1 = (1-1)^1 = 0$. La propriété est vraie au rang initial.

Hérédité On suppose qu'il existe un rang n tel que $u_{2n+1} = 0$ et $u_{2n} = 1$ et montrons que $u_{2n+3} = 0$ et $u_{2n+2} = 1$.
Comme $E(u_{2n+1}) = u_{2n+1} = 0$, $u_{2n+2} = (1-0)^0 = 1^0 = 1$ d'où, $u_{2n+3} = (1-1)^1 = 0^1 = 0$.
La propriété est donc héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$ i.e $u_{2n} = 1$, $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons maintenant que $u_0 \in [0,1[$ et montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = 1$ et que $u_{2n+2} = 0$.

Initialisation On pose $n = 0$. On doit donc montrer que, $u_1 = 1$ et que $u_2 = 0$. Comme $u_0 \in [0,1[$, alors $E(u_0) = 0$, $u_1 = (1-0)^0 = 1$ d'où, $u_2 = (1-1)^1 = 0$. La propriété est vraie au rang initial.

Hérédité On suppose qu'il existe un rang n tel que $u_{2n+1} = 1$ et $u_{2n+2} = 0$ et montrons que $u_{2n+3} = 1$ et $u_{2n+4} = 0$.
Comme $E(u_{2n+2}) = u_{2n+2} = 0$, $u_{2n+3} = (1-0)^0 = 1^0 = 1$ d'où, $u_{2n+4} = (1-1)^1 = 0^1 = 0$.
La propriété est donc héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$ i.e $u_{2n+1} = 1$, $u_{2n+2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = u_2$ et $u_{2n+1} = 1 - u_2$ et $u_2 \in \{0, 1\}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite c'est à dire, comme ces deux sous-suites sont constantes et égales respectivement à $1 - u_2$ et à u_2, on devrait avoir $u_2 = 1 - u_2$ ce qui équivaut à $u_2 = \frac{1}{2}$. Or $u_2 \in \{0, 1\}$, on en déduit une contradiction et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.