UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Correction Epreuve d'entrainement 1.

Jeudi 4 Mars

Exercice 1

1.

$$
\begin{array}{rl}
& \text{non}(\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\eta>0,\ \forall\,x\in\mathbb{R},\ \forall\,y\in\mathbb{R},\ |x-y|\le\eta \implies |f(x)-f(y)|\le\epsilon) \\
\iff & \exists\,\epsilon>0,\ \text{non}(\exists\,\eta>0,\ \forall\,x\in\mathbb{R},\ \forall\,y\in\mathbb{R},\ |x-y|\le\eta \implies |f(x)-f(y)|\le\epsilon) \\
\iff & \exists\,\epsilon>0,\ \forall\,\eta>0,\ \text{non}(\forall\,x\in\mathbb{R},\ \forall\,y\in\mathbb{R},\ |x-y|\le\eta \implies |f(x)-f(y)|\le\epsilon) \\
\iff & \exists\,\epsilon>0,\ \forall\,\eta>0,\ \exists\,x\in\mathbb{R},\ \text{non}(\forall\,y\in\mathbb{R},\ |x-y|\le\eta \implies |f(x)-f(y)|\le\epsilon) \\
\iff & \exists\,\epsilon>0,\ \forall\,\eta>0,\ \exists\,x\in\mathbb{R},\ \exists\,y\in\mathbb{R},\ \text{non}(|x-y|\le\eta \implies |f(x)-f(y)|\le\epsilon) \\
\iff & \exists\,\epsilon>0,\ \forall\,\eta>0,\ \exists\,x\in\mathbb{R},\ \exists\,y\in\mathbb{R},\ (|x-y|\le\eta \text{ et } |f(x)-f(y)|>\epsilon)
\end{array}
$$

2. Par définition, $(P \implies Q)$ est vraie $\iff$ $(P$ ou $\text{non}\,Q)$ est vraie.

$$
\begin{array}{rcl}
(P \implies Q) \text{ est vraie} & \iff & (P \text{ ou } \text{non}\,Q) \text{ est vraie} \\
& \iff & (\text{non}(\text{non}\,P) \text{ ou } \text{non}\,Q) \text{ est vraie} \\
& \iff & (\text{non}\,Q \text{ ou } \text{non}(\text{non}\,P)) \text{ est vraie} \\
& \iff & (\text{non}\,Q \implies \text{non}\,P) \text{ est vraie}
\end{array}
$$

Exercice 2

On va montrer, par récurrence double, que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$.

Initialisation $n=0$, $n=1$. D'après l'énoncé, $u_0 = 5$, $u_1 = 0$, $3(2^0) + 2((-3)^0) = 3+2 = 5$ et $3(2^1) + 2((-3)^1) = 6-6 = 0$. Pour $n=0$ et $n=1$, $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$.

Hérédité Supposons qu'il existe un certain rang $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$ et $u_{n+1} = 3(2^{n+1}) + 2((-3)^{n+1})$. Montrons que, $u_{n+2} = 3(2^{n+2}) + 2((-3)^{n+2})$.
D'après l'énoncé, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$. Par hypothèse de récurrence, $u_{n+2} = -3(2^{n+1}) - 2((-3)^{n+1})) + 6(3(2^n)) + 6(2((-3)^n)) = 3(2^n)[-2+6] + 2((-3)^n)[3+6] = 3(2^n)2^2 + 2((-3)^n)(3^2) = 3(2^{n+2}) + 2((-3)^{n+2})$.
On a donc $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$ et $u_{n+1} = 3(2^{n+1}) + 2((-3)^{n+1})$ implique que $u_{n+2} = 3(2^{n+2}) + 2((-3)^{n+2})$.

Conclusion Pour $n=0$, $n=1$, $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$. De plus, $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$ et $u_{n+1} = 3(2^{n+1}) + 2((-3)^{n+1})$ implique que $u_{n+2} = 3(2^{n+2}) + 2((-3)^{n+2})$, on a, par le principe de récurrence double $u_n = 3(2^n) + 2((-3)^n)$ pour tout entier naturel n.

Exercice 3

1. Soit f une application de E dans F. L'application f est injective si pour tout $x \in E$ pour tout $y \in E$, $f(x) = f(y) \implies x = y$.
2. Soit f une application de E dans F. L'application f est surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
3. (a) Comme $f(1) = 1+4-5 = 0$ et $f(-5) = 25-20-5 = 0$. De plus, comme f est un polynôme de degré 2, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ contient au plus 2 éléments. On conclut que, $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{1, 5\}$.

(b) La fonction f est un polynôme de degré 2 donc strictement positif en dehors des racines qui sont 1, 5, f est donc strictement positif sur $]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$. On conclut que, $f^{-1}(]0,+\infty[)=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)>0\}=]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$.

(c) $f(\{2\})=\{f(2)\}=4+8-5=7$ car f est une fonction.

(d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout réel x, $f'(x)=2x+4$. On a, par conséquent, $f'(x)\geq 0 \iff 2x+4\geq 0 \iff x\geq -2$. La fonction f est croissante sur $[-2,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,-2]$, on a donc $f(-2)=4-8-5=-9\leq f(x)$ quelque soit x réel. On conclut que $f^{-1}(\{-10\})=\emptyset$.

4. Comme $f^{-1}(\{0\})$ contient deux éléments, f n'est pas injective. Par ailleurs, $f^{-1}(\{-10\})=\emptyset$ donc f n'est pas surjective.

5. On a $g(i\sqrt{3})=g(-i\sqrt{3})=0$ et bien sur, $-i\sqrt{3}\neq i\sqrt{3}$, donc, g n'est pas injective.

Soit $y\in\mathbb{C}$ on a $z^2+3=y \iff z^2-y+3=0$. Le polynôme dans $\mathbb{C}$ en Z, Z^2-y+3 admet deux racines complexes donc il existe $z_1\in\mathbb{C}$ tel que $g(z_1)=y$ et comme y est arbitrairement choisi dans $\mathbb{C}$, g est surjective.

Sinon, on peut résoudre algébriquement ce problème. Comme $y\in\mathbb{C}$, il existe a,b réels tels que $y=a+ib$ et résoudre $z^2-y+3=0$ revient à chercher c,d réels tels que $(c+id)^2=a-3+ib \iff c^2+2icd-d^2=a-3+ib \iff (c^2-d^2-a+3)+i(2cd-b)=0$. On cherche donc c,d réels tels que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} c^2-d^2 &=& a-3\\ 2cd &=& b\end{array}\right.$$

-Premier cas :$y\in\mathbb{R}$ i.e $b=0$

On prend :

$$\left\{\begin{array}{lll} d=0, & c=\sqrt{a-3} & \text{si } a\geq 3\\ c=0, & d=\sqrt{3-a} & \text{si } a<3\end{array}\right.$$

On conclut que pour $y\in\mathbb{R}$, il existe $x\in\mathbb{C}$ tel que $g(x)=y$.

-Deuxième cas :$y\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ i.e $b\neq 0$

– Si $a\geq 3$

On résout :

$$\left\{\begin{array}{rcl} c^2 &=& a-3+d^2\\ 2cd &=& b\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} c^2 &=& a-3+d^2\\ d &=& \dfrac{b}{2c},\ c\neq 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} c^2 &=& a-3+\left(\dfrac{b}{2c}\right)^2\\ d &=& \dfrac{b}{2c},\ c\neq 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 4c^4-4c^2(a-3)-b^2\\ d &=& \dfrac{b}{2c},\ c\neq 0\end{array}\right.$$

Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 4c^4 - 4c^2(a-3) - b^2 \\ d & = & \dfrac{b}{2c},\ c \neq 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

Le polynôme en C, $4C^2 - 4C(a-3) - b^2$ admet comme discriminant $\Delta = 16(a-3)^2 + 16b^2 > 0$ (car $b \neq 0$), $C_1 = \dfrac{4(a-3)+\sqrt{\Delta}}{8}$ est une racine strictement positive de $4C^2 - 4C(a-3) - b^2$, on en déduit que $\sqrt{\dfrac{4(a-3)+\sqrt{\Delta}}{8}}$ est une racine non nulle de $4c^4 - 4c^2(a-3) - b^2$.

On conclut que $\bar{c} = \sqrt{\dfrac{4(a-3)+\sqrt{\Delta}}{8}} \neq 0$ et $\bar{d} = \dfrac{b}{2\bar{c}}$ est une solution de (1).

- Si $a < 3$

  On résout :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 4d^4 - d^2(3-a) - b^2 \\ c & = & \dfrac{b}{2d},\ d \neq 0 \end{array}\right.$$

  et on obtient, $\bar{d} = \sqrt{\dfrac{4(3-a)+\sqrt{\Delta}}{8}} \neq 0$ et $\bar{c} = \dfrac{b}{2\bar{d}}$.

  On conclut que, pour tout $y \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = y$.

Finalement, on conclut que g est surjective.

Exercice 4

1. $S_1 = 1^3(1-1)(1+1) = 0$, $S_2 = 1^3(1-1)(1+1) + 2^3(2-1)(2+1) = 0 + 3 \times 8 = 24$ et $S_3 = 1^3(1-1)(1+1) + 2^3(2-1)(2+1) + 3^3(3-1)(3+1) = 24 + 2 \times 4 \times 27 = 24 + 216 = 240$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n \\ n & + & n-1 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 \end{array}$$

   Dans la somme, il y a n termes tous égaux à $n+1$, on en déduit que $2\sum_{k=1}^{n} = n(n+1)$.
   On conclut que : $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. D'après 1., $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, d'où, $(\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Il suffit de montrer que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

   On va montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout entier naturel n non nul.

   Initialisation Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$.
   $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ est vraie pour $n = 1$.

Hérédité Supposons qu'il existe un rang n tel que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et montrons que, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4))}{4}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)^2(n+2)^2)}{4}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

On a montré que la proposition était héréditaire.

Conclusion La proposition est vraie au rang initial et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout entier naturel n non nul.

4. On va montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4} S_n$$

– Initialisation
On a $\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^3 = 1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 + \dfrac{3}{4} S_1$. Pour $n = 1$, on a bien, $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \dfrac{3}{4} S_n$.

– Hérédité
Supposons qu'il existe un rang n tel que,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4} S_n$$

et montrons que

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4} S_{n+1}$$

ou encore :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4} \left(S_n + n(n+1)^3(n+2)\right)$$

Pour tout a, b réels, on a $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
D'où,
$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = ((\sum_{k=1}^{n} k) + n + 1)^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^3 + 3(n+1)^2 (\sum_{k=1}^{n} k) + 3(n+1) (\sum_{k=1}^{n} k)^2 + (n+1)^3$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :
$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4}S_n + (n+1)^3 + 3(n+1)^2 (\sum_{k=1}^{n} k) + 3(n+1) (\sum_{k=1}^{n} k)^2$.
Puis en utilisant 2., on obtient que :
$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4}S_n + (n+1)^3 + 3(n+1)^2 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4}S_n + 3n(n+1)^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{4}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4}S_n + \frac{3}{4}\left(n(n+1)^3(n+2)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4}\left(S_n + n(n+1)^3(n+2)\right)$.
Ce que l'on voulait démontrer.
On a donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4}S_n$$

implique que

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \frac{3}{4}S_{n+1}$$

– Conclusion
La proposition est vraie au rang initial et héréditaire alors, d'après le principe de récurrence, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \frac{3}{4}S_n$$

pour tout entier naturel n non nul.

5. En utilisant 2., 3. et 4., on obtient que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}S_n &= \left(\frac{n^3(n+1)^3}{8}\right) - \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \\
&= \left(\frac{n^3(n+1)^3 - 2n^2(n+1)^2}{8}\right) \\
&= \left(\frac{n^2(n+1)^2(n(n+1)-2)}{8}\right)
\end{aligned}$$

On conclut que

$$S_n = \frac{4}{3}\left(\frac{n^2(n+1)^2(n(n+1)-2)}{8}\right)$$