UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure 45.

Mercredi 6 Mai

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.
Lire bien attentivement TOUT l'énoncé.

Questions de cours

1. Donner la définition de la continuité d'une fonction en un point :
   a. Avec les quantificateurs.
   b. Par les suites.
2. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1 Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$. Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à f, montrer que, si, pour tout, $x \in [a,b]$, $f''(x) < 0$ alors x_0 est l'unique maximum de f sur $[a,b]$.

Exercice 2 1. Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer que la fonction g définie par :

$$\begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue puis dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que g' n'est pas continue en 0.

Exercice 3 Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^*, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right).$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 2$, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2$.
3. Montrer que, f est croissante sur $[2, +\infty[$, puis montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \geq 2$.
4. Montrer que, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1 et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $b < 0$ et $c > 0$ tels que $b + c < 0$. On définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = bx^2 + cx + 1 - \frac{1}{n}x^{2n}$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} bx^2 + cx + 1 = -\infty$. En déduire qu'il existe $M_0 \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x > M_0 \implies f_n(x) \leq f_n(0)$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} bx^2 + cx + 1 = -\infty$. En déduire qu'il existe $M_1 \in \mathbb{R}_-^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x < M_1 \implies f_n(x) \leq f_n(0)$.
   Conclure qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x| > M \implies f_n(x) \leq 1$.
3. Pourquoi $|f_n|$ est-elle majorée sur $[-M, M]$?
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est majorée et atteint son maximum.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f_n'(x_n) = 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n' est strictement décroissante. En déduire que x_n est l'unique solution de l'équation $f_n'(x) = 0$ et que le maximum de f_n est atteint en x_n.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_{n+1}'(x) \geq f_n'(x)$. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et conclure que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
7. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2x_n^{2n-1} = 0$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \frac{-c}{2b}$.
8. Que vaut le maximum de la fonction $x :\mapsto bx^2 + cx + 1$?