

Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure 45.

Mercredi 6 Mai

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.

Lire bien attentivement TOUT l'énoncé.

Questions de cours

1. Donner la définition de la continuité d'une fonction en un point :
 - a. Avec les quantificateurs.
 - b. Par les suites.
2. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1 Soit une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Soit $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

En appliquant le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à f , montrer que, si pour tout $x \in [a, b]$, $f''(x) > 0$ alors x_0 est l'unique minimum de f sur $[a, b]$.

Exercice 2 1. Montrer que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 .

2. Montrer que la fonction g définie par :

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue puis dérivable sur \mathbb{R} mais que g' n'est pas continue en 0.

Exercice 3 Soit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^*, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq \sqrt{2}$, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
3. Montrer que, f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, puis montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \geq \sqrt{2}$.
4. Montrer que, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1 et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Donner la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $b > 0$ et $c < 0$ tels que $b + c > 0$. On définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^{2n} + bx^2 + cx + 1$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe \mathcal{C}^2 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} bx^2 + cx + 1 = +\infty$. En déduire qu'il existe $M_0 \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x > M_0 \implies f_n(x) \geq f_n(0)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} bx^2 + cx + 1 = +\infty$. En déduire qu'il existe $M_1 \in \mathbb{R}_-$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x < M_1 \implies f_n(x) \geq f_n(0)$.
Conclure qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x| > M \implies f_n(x) \geq 1$.
3. Pourquoi $|f_n|$ est-elle minorée sur $[-M, M]$?
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est minorée et atteint son minimum.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f'_n(x_n) = 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f'_n est strictement croissante. En déduire que x_n est l'unique solution de l'équation $f'_n(x) = 0$ et que le minimum de f_n est atteint en x_n .
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 1]$, $f'_{n+1}(x) \leq f'_n(x)$. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et conclure que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
7. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2x_n^{2n-1} = 0$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{-c}{2b}$.
8. Que vaut le minimum de la fonction $x \mapsto bx^2 + cx + 1$?