UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement du 5 Mars 2009

Corrections

1. Cours.... f est dit injective si pour tout $x, x' \in E$, $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.
   f est dite surjective si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
2. a. *non* $[\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta \implies |f(x_0) - f(x)| < \epsilon] =$
   $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| < \eta$ et$|f(x_0) - f(x)| \geq \epsilon$

   b. Soit $\epsilon > 0$, soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{n+2} < \epsilon \iff n + 2 > \dfrac{3}{\epsilon} \iff n > \dfrac{3}{\epsilon} - 2$, il suffit donc de prendre $N_0 = \max(0, E(\dfrac{3}{\epsilon} - 2) + 1)$, pour avoir $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \implies \dfrac{3}{n+2} < \epsilon$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et soit $P(n)$ la proposition $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[,\ (1+x)^n > 1 + nx$. on va montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.
   Initialisation. $n = 2$, soit $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $(1+x)^n = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$, comme $x \neq 0$ alors $x^2 > 0$ et donc $1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ et par conséquent $P(2)$ est vraie.
   Hérédité. Supposons que pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire que $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[,\ (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$.
   Soit $x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[$, si $x = -1$, $(1+x)^{n+1} = 0$ et $1 + (n+1)x = -n \leq -2$, d'où, $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$. Si $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, d'après l'hypothèse de récureence, $(1+x)^n > 1 + nx$ et comme $x > -1$, $(1+x) > 0$ donc $(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x)$ ce qui équivaut à $(1+x)^{n+1} > 1 + nx + x + nx^2$ et comme $x \neq 0$, $x^2 > 0$ et on conclut que $(1+x)^{n+1} > 1 + nx + x + nx^2 > 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$, ce qui était l'inégalité à démontrer par conséquent, $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. $P(2)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 2$.
4. a. Soient $k, n \in \mathbb{N}$, tels que $k \leq n$, $(k+1)\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = (k+1)\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = (k+1)\dfrac{n+1}{k+1}\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = (n+1)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \{0, \ldots, n\}$, d'après a., $\dfrac{1}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

   Par conséquent, $A = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$. En posant $k' = k+1$, $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on obtient $A = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k'=1}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k' \end{pmatrix}$.

   En appliquant la formule du binôme de Newton, on a $(1+1)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k'=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k' \end{pmatrix} 1^{n+1-k}1^k$ et on en déduit que $\displaystyle\sum_{k'=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k' \end{pmatrix} = 2^{n+1}$.

   Or $A = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k'=1}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k' \end{pmatrix} =$

   $$\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k' \end{pmatrix} - 1\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

5. $f\left(\left[\frac{1}{2};4\right[\right)$ est appelé l'image directe de $\left[\frac{1}{2};4\right[$ par f. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2} \leq x < 4 \iff \frac{3}{2} \leq 3x < 12$, la fonction $x :\mapsto E(x)$ est croissante donc $1 \leq E(x) \leq 11$ et on conclut que $f\left(\left[\frac{1}{2};4\right[\right) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

   $f^{-1}(\{5\})$ est appelé image réciproque de 5 par f et $f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid E(3x) = 5\}$, par conséquent, $f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq 3x < 6\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} \leq x < 2\} = [\frac{5}{3}; 2[$