UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement du 5 Mars 2009

Corrections

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-n-1)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n!)}{(n+1)(n!)(n+1)(n!)}$$
$$= \frac{2(2n+1)(2n!)}{(n!)(n+1)(n!)} = \frac{2n!}{n!(2n-n)!}\frac{2(2n+1)}{(n+1)} = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \times \frac{2(2n+1)}{(n+1)}$$

b. Soit $\in \mathbb{N}^*$ et soit $P(n)$ la proposition : "$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$". On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Initialisation Soit $n = 1$, $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{1!1!} = 2 \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}} = \frac{4}{2} = 2$, ce qui entraîne que $P(1)$ est vraie.

Hérédité On suppose que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire montrons que $\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$.

Par l'hypothèse de récurrence : $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$, en utilisant a. et puisque $\frac{2(2n+1)}{n+1}$ est positif, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \geq \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$ ce qui équivaut à

$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{2\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} \geq 1.$$

Or $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \times \frac{2\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{4^n}{4^{n+1}} \times \frac{2(2n+1)}{2\sqrt{n}} \times \frac{2\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$. Or $0 \leq (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = n+1+n-2\sqrt{n+1}\sqrt{n}$ d'où $2n+1 \geq 2\sqrt{n+1}\sqrt{n}$ ce qui équivaut, puisque $\sqrt{n+1}\sqrt{n} > 0$, à $\frac{2n+1}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \geq 1$. Par conséquent, $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$ et $\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} \geq \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$ et donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion $P(1)$ est vraie et $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie, d'après le principe de récurrence, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Soit la proposition : $\exists\, l \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0\, \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies |u_n - l| < \epsilon$.
non $[\exists\, l \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0\, \exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies |u_n - l| < \epsilon] =$
$[\forall\, l \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0,\ \forall\, N_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \text{ et} |u_n - l| \geq \epsilon]$

b. Soit $A \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, $\ln(n+1) > A \iff e^{\ln(n+1)} > e^A$ car $x :\mapsto e^x$ est strictement croissante, $e^{\ln(n+1)} > e^A \iff n+1 > e^A \iff n > e^A - 1$. Il suffit de prendre $N_0 = E(e^A - 1) + 1$ pour que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_0 \implies \ln(n+1) > A$.

3. a. On pourrait utiliser un raisonnement par récurrence. Mais, on peut faire un changement de variable, c'est à dire, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on peut poser $k' = k-1$ et $k' \in \{0, \ldots, n\}$, on conclut que $T_n + (n+1)^3 = T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k'=0}^{n} (k'+1)^3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$, $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ donc $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = T_n + 3S_n + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1$ et par conséquent, $T_n + (n+1)^3 = T_n + 3S_n + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 \iff 3S_n = (n+1)^3 - 3\dfrac{n(n+1)}{2} - (n+1)$, $3S_n = \dfrac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{2} = \dfrac{(n+1)(2n^2+n)}{2} = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{2}$.

On conclut que $S_n = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n =$ "$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$". On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Initialisation. $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité. On suppose que, pour une certain $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n est vraie. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ c'est à dire $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$, d'aprés l'hypothése de récurrence, on a $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$. On factorise l'intérieur de la parenthèse on trouve $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion. La proposition P_n est vraie au rang initial $n = 0$ et de plus la proposition P_n est héréditaire par conséquent, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. a. f est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$, donc $f\left(\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{6}\right]\right) = \left[f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right); f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

b. $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = \dfrac{1}{2}\right\} = \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $f^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = \dfrac{\pi}{2}\right\} = \emptyset$, car $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.