UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.2

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure.

Jeudi 2 Avril

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.

Questions de cours

1. Donner la définition avec les quantificateurs d'une suite non bornée.
2. Donner la définition d'une suite divergente.

Exercice 1 Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in \{0,1\} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1-u_n)^{u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 2 Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$ puis $v_n \leq v_{n+1}$ et $u_{n+1} \leq u_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq |u_n - v_n|/2$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3 Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in]-\infty,-1],\ \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}$$

On pose, pour $x \in]-\infty,-1]$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

1. Montrer que $]-\infty,-1]$ est stable par f, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq -1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.