Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure.

Jeudi 2 Avril

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.

Questions de cours

1. Que doivent vérifier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour être deux suites adjacentes ? Enoncer le théorème des suites adjacentes.
2. Donner la définition, avec les quantificateurs, d'une suite non bornée.

Exercice 1 Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in \{0,1\} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 2 Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$ puis $v_n \leq v_{n+1}$ et $u_{n+1} \leq u_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq |u_n - v_n|/2$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3 Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [-1, 1]$.
2. Montrer que, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$ est décroissante si $v_0 > 0$ et croissante si $v_0 < 0$.
3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.