UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2008/2009
LM115-Suites et Intégrales

Epreuve d'entraînement 2. Durée 1 heure 45.

Mercredi 6 Mai

Questions de cours

1. Donner la définition de la continuité d'une fonction en un point :
   a. Avec les quantificateurs :
   Une fonction f est dite continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, si
   $$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$
   b. Par les suites :
   On dit que f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.
2. Enoncer le théorème des accroissements finis.
   Soit $[a, b]$ un intervalle. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Si f continue de $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :
   $$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

Exercice 1 Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f'(x_0) = 0$. Soit $x_1 \in [a, b]$.tel que $x_1 \neq x_0$.
Supposons $x_1 > x_0$.

La fonction f étant $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de Taylor-Lagrange il existe $c \in]x_0, x_1[$ tel que :
$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(c).$$
Or $f'(x_0) = 0$ et $f''(c) > 0$ ce qui implique que :
$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(c) > f(x_0).$$
Et donc, $\forall x_1 \in [a, b]$ tels que $x_1 > x_0$, $f(x_1) > f(x_0)$.

Supposons $x_1 < x_0$.

Lemme 1 *Il existe $d \in]x_1, x_0[$ tel que :*
$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(d).$$

Preuve 1 *Pour le montrer, on applique deux fois le théorème de Rolle à la fonction de* $[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *:*

$$x :\mapsto g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2} M$$

où M *est choisi tel que* $g(x_1) = 0$*, comme* $x_1 \neq x_0$*, on obtient :*

$$M = \frac{2\left(f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0) f'(x_0)\right)}{(x_1 - x_0)^2}$$

Or $g(x_0) = 0 = g(x_1)$*, d'après le théorème de Rolle, il existe* $c \in]x_1, x_0[$ *tel que* $g'(c) = 0$*. De plus, pour* $x \in [a,b]$ *:*

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) - M(x - x_0)$$

ceci implique que $g'(x_0) = 0 = g'(c)$*, d'après le théorème de Rolle (appliqué à* g'*), il existe* $d \in]c, x_0[$ *tel que :* $g'(d) = f''(d) - M = 0$*.*

Finalement

$$f''(d) = \frac{2\left(f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0) f'(x_0)\right)}{(x_1 - x_0)^2}$$

et on conclut que :

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(d).$$

Fin de la preuve.

Comme $f'(x_0) = 0$ et $f''(d) > 0$, on a :

$$f(x_1) = f(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(d) > f(x_0).$$

En conclusion, $\forall\, x_1 \in [a,b]$ tel que $x_1 \neq x_0$, $f(x_1) > f(x_0)$ donc x_0 est l'unique minimiseur de f sur $[a,b]$.

Exercice 2

1. La fonction $f_1 : \mathbb{R}^* \mapsto [-1,1]$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_1(x) = \cos(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $f_2 : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ telle que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f_2(x) = x^3$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que polynôme. La fonction f restreinte à $\mathbb{R}^*$ étant le produit de f_1 et de f_2, f est $\mathcal{C}^1$.
   Montrons que f est $\mathcal{C}^1$ en 0.
   Montrons d'abord que f est dérivable en 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$
   $$\frac{x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
   Or $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ et par conséquent, $x^2 \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$. En utilisant le théorème d'encadrement on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x^2 \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$, et on conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   Montrons que f' est continue en 0.
   Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, montrons que $f'(x) \to 0$ quand $x \to 0$, $x \neq 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a déjà vu que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. De plus, $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ et par conséquent, $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. En utilisant le théorème d'encadrement on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$, et on conclut que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0$ et en conclusion f' est continue en 0.

On conclut que f est $\mathcal{C}^1$.

2. La fonction $g_1 : \mathbb{R}^* \mapsto [-1, 1]$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_1(x) = \sin(\frac{1}{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $g_2 : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g_2(x) = x^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que polynôme. La fonction g restreinte à $\mathbb{R}^*$ étant le produit de g_1 et de g_2, g est $\mathcal{C}^1$

   Montrons que g est dérivable en 0.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Or $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ et par conséquent, $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$. En utilisant le théorème d'encadrement on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$, et on conclut que g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

   Montrons que g' n'est pas continue en 0.

   Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, montrons que g' n'a pas de limite en 0.

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   On a déjà vu que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. En revanche, la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $[-1, 1]$, $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 et par conséquent, g' n'admet pas de limite en 0 et g' n'est pas continue en 0.

   On peut utiliser le fait que cos est une fonction périodique non constante et donc n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3 1. On montre, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Initialisation D'après l'énoncé, $u_0 > 0$, la propriété est vraie au rang initial.

Hérédité Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, ceci implique que $\frac{1}{u_n}$ existe et que $\frac{1}{u_n} > 0$, on conclut que $\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} > \frac{u_n}{2} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$. La propriété est par conséquent héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, en conclusion, par le principe de récurrence, $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^2 + 2}{2x}$. Or, $0 \leq \left(x - \sqrt{2}\right)^2 = x^2 - 2x\sqrt{2} + 2$ ceci implique que $2x\sqrt{2} \leq x^2 + 2$ et on déduit de $x > 0$ que $\sqrt{2} \leq \frac{x^2 + 2}{2x} = f(x)$.

   On montre, par récurrence, que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

Initialisation D'après l'énoncé, $u_0 > 0$ et par conséquent $u_1 = f(u_0) \geq \sqrt{2}$ et la propriété est vraie au rang initial.

Hérédité Supposons qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq \sqrt{2} > 0$, ceci implique que $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{2}$. La propriété est par conséquent héréditaire.

Conclusion La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, en conclusion, par le principe de récurrence, $u_n \geq \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

On peut, si on n'aime pas les récurrences, dire que :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1})$, or pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p > 0$, et $f(x) \geq \sqrt{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ d'où, $u_n = f(u_{n-1}) \geq \sqrt{2}$. Comme n est arbitrairement choisi dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. f est dérivable sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. Soit $x \in [\sqrt{2}, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right)$. Or $x \geq \sqrt{2}$ donc $x^2 - 2 \geq 0$, de plus, $x^2 > 0$ d'où, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right) \geq 0$ et donc f est donc croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

   Soit $x \in [\sqrt{2}, +\infty[$, $f(x) - x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right) - x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x} - x = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2-x^2}{2x}$. Or $x \geq \sqrt{2}$ donc $x^2 - 2 \geq 0$ d'où $2 - x^2 \leq 0$ et on conclut que $f(x) - x = \dfrac{2-x^2}{2x} \leq 0$.

4. Comme f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, de plus, en utilisant le fait que $f(x) - x \leq 0\ \forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[$, on déduit que $u_2 = f(u_1) \leq u_1$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   Par ailleurs, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $\sqrt{2}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers, or si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi et vers la même limite.

5. Posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. De plus, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l, de plus f est une fonction continue sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, ce qui implique $l = f(l)$.

   Or $f(l) = l \iff \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{2}{l}\right) = l \iff \dfrac{1}{2}l + \dfrac{1}{l} - l = 0 \iff -\dfrac{1}{2}l + \dfrac{1}{l} = 0 \iff \dfrac{2-l^2}{2l} = 0 \iff l \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{2}$, $l \geq \sqrt{2}$, en conclusion $l = \sqrt{2}$.

Exercice 4 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^2$ en tant que polynôme.

2. Soit $x > 0$, $bx^2 + cx + 1 = x\left(bx + c + \dfrac{1}{x}\right)$. Or $bx + c + \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} bx^2 + cx + 1 = +\infty$. Par définition de la limite en $+\infty$, il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > M_0 \implies bx^2 + cx + 1 \geq 1 = f_n(0)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geq bx^2 + cx + 1$, ce qui entraîne que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x > M_0 \implies f_n(x) \geq bx^2 + cx + 1 \geq f_n(0)$ (M_0 ne dépend pas de n).

   Finalement, il existe $M_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > M_0 \implies f_n(x) \geq f_n(0)$.

   Soit $x < 0$, $bx^2 + cx + 1 = x\left(bx + c + \dfrac{1}{x}\right)$. Or $bx + c + \dfrac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty} bx^2 + cx + 1 = +\infty$. Par définition, $\exists\, M_1 < 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < M_1 \implies bx^2 + cx + 1 \geq 1 = f_n(0)$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \geq bx^2 + cx + 1$, ce qui entraîne que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x < M_1 \implies f_n(x) \geq bx^2 + cx + 1 \geq f_n(0)$. ($M_1$ ne dépend pas de n)

   Finalement, il existe $M_1 < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < M_1 \implies f_n(x) \geq f_n(0)$.

   On pose $M = \max(M_0, -M_1)$ et on obtient :

   Il existe $M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| > M \implies f_n(x) \geq f_n(0) = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue donc minorée sur l'intervalle fermé borné non vide $[-M, M]$ et atteint son minimum. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $m_n = \min\limits_{x\in[-M,M]} f_n(x) = f_n(u_n)$. Par définition, $m_n = f_n(u_n) \leq f_n(x)\ \forall x \in [-M, M]$, de plus, $0 \in [-M, M]$, $m_n = f_n(u_n) \leq f_n(0)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| > M$, $m_n = f_n(u_n) \leq f_n(x)$. En conclusion, $\forall x \in \mathbb{R}$, $m_n = f_n(u_n) \leq f_n(x)$ et donc f_n est minorée et u_n est un minimiseur de f_n.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1., f_n est $\mathcal{C}^2$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = (2n)\,\frac{1}{n}x^{2n-1} + 2bx + c = 2x^{2n-1} + 2bx + c.$$

On a $f_n'(0) = c < 0$ d'après l'énoncé et $f_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} + b + c > b + c > 0$ d'après l'énoncé. f_n étant $\mathcal{C}^2$, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires et donc il existe $x_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $f_n'(x_n) = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^2$, par conséquent f_n'' existe et, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n''(x) = 2\,(2n-1)\,x^{2(n-1)} + 2b.$$

Or $2\,(n-1)$ est pair donc $2\,(2n-1)\,x^{2(n-1)} \geq 0$ et d'après l'énoncé $b > 0$, on conclut que : $f_n''(x) > 0$ et donc f_n' est strictement croissante, on en déduit que f_n' est injective et donc, par conséquent, x_n est l'unique solution de l'équation $f_n'(x) = 0$.
Comme f_n' est strictement croissante $f_n'(x) < 0$, $\forall\, x < x_n$ et $f_n'(x) > 0$ $\forall\, x > x_n$, on en déduit que f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, x_n[$ et strictement croissante sur $]x_n, +\infty[$ d'où, $\forall\, x < x_n$, $f_n(x) > f_n(x_n)$ et $\forall\, x > x_n$, $f_n(x) > f_n(x_n)$ et en conclusion, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_n \implies f_n(x) > f_n(x_n)$ et x_n est l'unique minimiseur de f_n sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0,1]$,

$$f_{n+1}'(x) - f_n'(x) = 2x^{2n+1} + 2bx + c - \left(2x^{2n-1} + 2bx + c\right) = 2x^{2n-1}\left(x^2 - 1\right)$$

Mais $x \in [0,1]$ d'où, $2x^{2n-1} \geq 0$ et $x^2 - 1 \leq 0$, finalement, $f_{n+1}'(x) - f_n'(x) \leq 0$.
On en déduit que $f_{n+1}'(x_{n+1}) \leq f_n'(x_{n+1})$ ce qui implique que $0 = f_n'(x_n) \leq f_n'(x_{n+1})$ Mais, f_n' est strictement croissante donc $x_n < x_{n+1}$.

Lemme 2 *Soit f une fonction $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si f est strictement croissante alors $f(x) \leq f(y) \implies x \leq y$*

Preuve 2 *Par l'absurde, supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que : $f(x) \leq f(y)$ et $x > y$. Comme f est strictement croissante, $x > y \implies f(x) > f(y)$, ce qui est contradictoire avec $f(x) \leq f(y)$.*

La propriété est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, par ailleurs, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{2}$, par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \in [0, \frac{1}{2}]$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < \frac{1}{2}$, on a, donc, $0 < 2x_n^{2n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-1)}$. Par le théorème d'encadrement, on obtient que $2x_n^{2n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x_n) = 0$ ce qui est équivalent à $2x_n^{2n-1} + 2bx_n + c = 0$ qui est lui même équivalent à $2bx_n + c = -2x_n^{2n-1}$. Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l et $\left(-2x_n^{2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Par ailleurs la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x :\mapsto 2bx + c$ est continue donc $2bx_n + c$ converge vers $2bl + c$ quand n tend vers $+\infty$ et par unicité de la limite $2bl + c = 0$, et finalement $l = \frac{-c}{2b}$. On remarque que $b + c > 0 \implies b > -c$ ce qui implique, comme $-c > 0$, que $0 < \frac{-c}{b} < 1$ et finalement $0 < \frac{-c}{2b} < \frac{1}{2}$.

8. Si on étudie, la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $g : x \mapsto bx^2 + cx + 1$, on remarque que le minimum de cette fonction est atteint en $\frac{-c}{2b}$, on a donc construit une suite de (perturbations de g) fonctions convexes continues minorées dont la suite des minimiseurs convergeait vers le minimiseur de g.