

Corrigé Epreuve d'entraînement 2

Jeudi 2 Avril

Questions de cours

1. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée si pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \geq M$.
2. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite divergente si $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et $|u_n - l| \geq \epsilon$.

Exercice 1 On va supposer $u_0 = 1$. On va montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$, la proposition " $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$ "

Initialisation :

Par hypothèse, $u_0 = 1$ et $u_1 = (1 - u_0)^{u_0} = (1 - 1)^1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang initial.

Hérédité :

Supposons que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$, et montrons que, $u_{2(n+1)} = 1$ et $u_{2n+3} = 0$.

$$u_{2(n+1)} = (1 - u_{2n+1})^{u_{2n+1}} = (1 - 0)^0 = 1 \text{ et } u_{2n+3} = (1 - u_{2n+2})^{u_{2n+2}} = (1 - 1)^1 = 0.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

La propriété est initialisée et héréditaire, par le principe de récurrence, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conclut que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et converge vers 1 et que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et converge vers 0.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes, par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

On effectue le même raisonnement pour $u_0 = 0$.

Exercice 2 1. On va montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition " $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ".

Initialisation :

$n = 0$. Par hypothèse, $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité :

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n + v_n > 0$, d'où $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$, de plus, $u_n v_n > 0$ et on

$$\text{déduit que } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

On conclut que $P(n)$ vraie implique que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

$$2. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}} \iff u_n - v_n = \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2 - 4u_{n-1}v_{n-1}}{2(u_{n-1} + v_{n-1})}.$$

$$\text{Or } (u_{n-1} + v_{n-1})^2 - 4u_{n-1}v_{n-1} = u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2 + 2u_{n-1}v_{n-1} - 4u_{n-1}v_{n-1} = u_{n-1}^2 + v_{n-1}^2 - 2u_{n-1}v_{n-1} = (u_{n-1} - v_{n-1})^2.$$

Finalement, $u_n - v_n = \frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1} + v_{n-1})}$ et comme $(u_{n-1} - v_{n-1})^2 \geq 0$, $u_{n-1} > 0$ et $v_{n-1} > 0$, $u_n - v_n \geq 0$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_n v_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{2u_n v_n - v_n u_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n}$, or on vient de montrer que $(u_n - v_n) \geq 0$ et $v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et par conséquent $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}$, or on vient de montrer que $(u_n - v_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et par conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$$3. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - v_{n+1}| = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \iff u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} = (u_n - v_n) \frac{(u_n - v_n)}{2(u_n + v_n)}.$$

Or $v_n > 0 \implies u_n - v_n \leq u_n \leq u_n + v_n$, on en déduit que $\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leq 1$, et comme $u_n - v_n \geq 0$ cela implique que $\frac{u_n - v_n}{2} \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leq \frac{u_n - v_n}{2} = \frac{|u_n - v_n|}{2}$ et finalement, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{|u_n - v_n|}{2}$.

4. On va montrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$.

Initialisation :

D'après la question 3, $0 \leq |u_1 - v_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |u_0 - v_0|$ et donc la propriété au rang initial.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie au rang n i.e $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$ i.e $0 \leq |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - v_0|$.

D'après la question 3, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{|u_n - v_n|}{2}$, or par hypothèse de récurrence, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$ on en déduit que $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - v_0|$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$.

Par le théorème de comparaison des suites, $|u_n - v_n|$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. De plus, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc d'après le théorème des suites adjacentes, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3 1. Soit $x \in]-\infty, -1]$, $x \leq -1 \implies -x \geq 1$, or $y^2 - y = y(y - 1) \geq 0$, pour tout $y \geq 1$.

On en déduit que $x^2 \geq -x \implies x^2 + 1 \geq -x + 1$. Finalement, comme $-x + 1 > 0$, $\frac{x^2 + 1}{-x + 1} \geq 1$,

et on conclut que $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\frac{x^2 + 1}{-x + 1} \leq -1$. La fonction f est stable sur $] -\infty, -1]$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq -1$.

Initialisation :

Comme, $u_0 \in]-\infty, -1]$, la propriété est vraie au rang initial

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie au rang n i.e $u_n \leq -1$ et montrons que $u_{n+1} \leq -1$.

La fonction f est stable sur $] -\infty, -1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leq -1$, on conclut que $u_{n+1} \leq -1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq -1$.

2. La fonction f est dérivable sur $] -\infty, -1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x \in] -\infty, -1]$,

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. Or $(x-1)^2 > 0$ car $x \leq -1$. De plus, $x \leq -1 \implies -2x \geq 2 \implies x^2-2x-1 \geq x^2+2-1 = x^2+1 > 0$. On conclut que, $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante.

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, or $u_1 - u_0 = \frac{u_0^2+1}{u_0-1} - u_0 = \frac{u_0^2+1-u_0(u_0-1)}{u_0-1} = \frac{u_0^2+1-u_0^2+u_0}{u_0-1} = \frac{1+u_0}{u_0-1} > \frac{u_0-1}{u_0-1} = 1 > 0$.

Par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (question 1), $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite qu'on note l . Par ailleurs, f est continue donc la limite vérifie $l = f(l)$.

Résolvons donc l'équation $l = f(l)$, remarquons, tout d'abord que, comme $u_n \leq -1$, $l \leq -1$ et donc $l \neq 1$.

$$l = f(l) \iff l = \frac{l^2+1}{l-1} \iff l(l-1) = l^2+1 \iff l^2-l-l^2=1 \iff l=-1.$$

En conclusion, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.