

Corrigé Epreuve d'entraînement 2

Jeudi 2 Avril

Questions de cours

1. Deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante), $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème des suites adjacentes : Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

2. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée si pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \geq M$.

Exercice 1 On va supposer $u_0 = 1$. On va montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$, la proposition “ $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$ ”

Initialisation :

Par hypothèse, $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{1 - u_0} = \sqrt{1 - 1} = 0$. La propriété est donc vraie au rang initial.

Hérédité :

Supposons que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$, et montrons que, $u_{2(n+1)} = 1$ et $u_{2n+3} = 0$.

$$u_{2(n+1)} = \sqrt{1 - u_{2n+1}} = \sqrt{1 - 0} = 1 \text{ et } u_{2n+3} = \sqrt{1 - u_{2n+2}} = \sqrt{1 - 1} = 0.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion :

La propriété est initialisée et héréditaire, par le principe de récurrence, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On conclut que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et converge vers 1 et que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et converge vers 0.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes, par conséquent, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

On effectue le même raisonnement pour $u_0 = 0$.

Exercice 2 1. On va montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la proposition “ $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ”.

Initialisation :

$n = 0$. Par hypothèse, $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité :

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, montrons que $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, $v_n > 0$, d'où $u_n v_n > 0$, et $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ existe et

$$u_{n+1} > 0, \text{ de plus, } u_n v_n > 0 \text{ et } u_n + v_n > 0 \text{ on déduit que } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

On conclut que $P(n)$ vraie implique que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - v_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} - \frac{2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}}$$

$$\iff u_n - v_n = \frac{\sqrt{(u_{n-1}v_{n-1})(u_{n-1} + v_{n-1})} - 2u_{n-1}v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}}.$$

$$\text{Or } \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(u_{n-1} + v_{n-1}) - 2u_{n-1}v_{n-1} =$$

$$\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(u_{n-1} + v_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}) = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2.$$

Finalement, $u_n - v_n = \frac{\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{u_{n-1} + v_{n-1}}$ et comme $(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2 \geq 0$, $u_{n-1} > 0$ et $v_{n-1} > 0$ ce qui implique que $u_{n-1} + v_{n-1} > 0$, $u_n - v_n \geq 0$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq v_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - v_n = \frac{2u_nv_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{2u_nv_n - v_nu_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_nv_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n}$, or on vient de montrer que $(u_n - v_n) \geq 0$ et $v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et par conséquent $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_nv_n} - u_n$, comme $u_n \geq v_n$, $u_n^2 \geq u_nv_n$ puis en utilisant la croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$, $u_{n+1} - u_n \leq \sqrt{u_nu_n} - u_n = u_n - u_n = 0$ on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - v_{n+1}| = u_{n+1} - v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n} - \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$$

$$\iff u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_nv_n}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n})}{u_n + v_n} = \frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n + v_n}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n})$$

Or $0 \leq (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}$ d'où $u_n + v_n \geq 2\sqrt{u_nv_n}$ puis $\frac{u_n + v_n}{\sqrt{u_nv_n}} \geq 2$ et enfin $\frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n + v_n} \leq \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, comme, $u_n \geq v_n \implies u_nv_n \geq v_n^2 \implies \sqrt{u_nv_n} \geq v_n \implies -2\sqrt{u_nv_n} \leq -2v_n$, on en déduit que $u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n} \leq u_n + v_n - 2v_n = u_n - v_n$.

Finalement,

$$\frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n + v_n} \leq \frac{1}{2}$$

et $u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n} \geq 0$ ce qui entraîne :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\sqrt{u_nv_n}}{u_n + v_n}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}) \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n - 2\sqrt{u_nv_n}) \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

4. On va montrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$.

Initialisation :

D'après la question 3, $0 \leq |u_1 - v_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |u_0 - v_0|$ et donc la propriété au rang initial.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie au rang n i.e $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$ et montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$ i.e $0 \leq |u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - v_0|$.

D'après la question 3, $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{|u_n - v_n|}{2}$, or par hypothèse de récurrence, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$ on en déduit que $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - v_0|$

Conclusion :

La propriété est vraie au rang initial et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - v_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - v_0|$.

Par le théorème de comparaison des suites, $|u_n - v_n|$ converge vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. De plus, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc d'après le théorème des suites adjacentes, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, et supposons $|x| \geq 1 \implies x^2 \geq |x|$, car $y^2 - |y| = |y|(|y| - 1) \geq 0$, pour tout $|y| \geq 1$. Or $1 + x^2 \geq x^2 \geq |x| \implies x^2 + 1 \geq |x|$. Finalement, comme $x^2 + 1 > 0$, $\frac{|x|}{x^2 + 1} \leq 1$, et on conclut que $|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| = \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq 1$.

Supposons que, $|x| < 1$, $x^2 \geq 0$ ceci implique que $|x| < 1 \leq 1 + x^2$ d'où $\frac{|x|}{x^2 + 1} \leq 1$ et par conséquent

$|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| = \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq 1$. On conclut que f est à valeur dans $[-1, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1})$, or f est à valeur dans $[-1, 1]$ donc $u_n \in [-1, 1]$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Or $(x^2 + 1)^2 > 0$ et $1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$

On conclut que, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et donc f est croissante sur $[-1, 1]$.

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, or $v_1 - v_0 = \frac{v_0}{v_0^2 + 1} - v_0 = \frac{v_0 - v_0(v_0^2 + 1)}{v_0^2 + 1} = \frac{v_0(1 - v_0^2 - 1)}{v_0^2 + 1} = \frac{-v_0^3}{v_0^2 + 1} \geq 0$ si $v_0 \leq 0$ et $v_1 - v_0 \leq 0$ si $v_0 \geq 0$.

Par conséquent, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $v_0 \leq 0$ et décroissante $v_0 \geq 0$.

3. Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (question 1), dans les deux cas, $v_0 \geq 0$ et $v_0 \leq 0$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Appelons l la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique $|v_n - l| < \epsilon$. Soit $n \geq N + 1$, $|u_n - l| = |u_n - v_{n-1} + v_{n-1} - l| \leq |u_n - v_{n-1}| + |v_{n-1} - l| = 0 + \epsilon$, on conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite. Par ailleurs, f est continue donc la limite vérifie $l = f(l)$.

Réolvons donc l'équation $l = f(l)$.

$l = f(l) \iff l = \frac{l}{l^2 + 1} \iff l(l^2 + 1) = l \iff l^3 + l - l = 0 \iff l = 0$.

En conclusion, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.