

Mercredi 4 mars 2009.

Epreuve d'entraînement. Durée 1 heure.

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles E et F .
Donner la définition d'une application injective et d'une application surjective pour f .

2. a. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Ecrire à l'aide de quantificateurs la négation de la proposition :
 $\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in \mathbb{R} |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. b. Etablir la proposition : $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N_0 \Rightarrow \frac{3}{n+2} < \varepsilon$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2 \forall x \in [-1, 0[\cup]0, +\infty[(1+x)^n > 1+nx$.

4. On rappelle que pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a. Etablir que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, k \leq n \Rightarrow (k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$.

b. En déduire une simplification de $A = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$ et prouver que : $A = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout réel x par $f(x) = E(3x)$ où E désigne la fonction partie entière.

a. Quel nom porte l'ensemble $f([\frac{1}{2}; 4[)$? Déterminer $f([\frac{1}{2}; 4[)$.

b. Quel nom porte l'ensemble $f^{-1}(\{5\})$? Déterminer $f^{-1}(\{5\})$.