Université Pierre et Marie Curie
LM115, MIME22, TD 221, année 2008-2009

Mercredi 4 mars 2009.

Epreuve d'entraînement. Durée 1 heure :

Les documents, calculatrices, téléphones portables, etc, sont interdits. Il sera tout particulièrement tenu compte de la rédaction : tout résultat non justifié sera considéré comme incorrect.

1. On rappelle que pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant k$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n} \times \frac{2(2n+1)}{n+1}$.

b. En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

2. a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Ecrire à l'aide de quantificateurs la négation de la proposition :
$\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

2. b. Etablir la proposition : $\forall A \in \mathbb{R} \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant N_0 \Rightarrow \ln(n+1) > A$.

3. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Nous allons déterminer la valeur de S_n de deux manières différentes.

a. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ (ne pas chercher à calculer cette somme).

En établissant l'égalité : $T_n + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$, exprimer $3S_n$ en fonction de n.

En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

b. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout réel x par $f(x) = \cos(x)$.

a. Déterminer $f([\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}])$.

b. Déterminer $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$.

c. Déterminer $f^{-1}(\{\frac{\pi}{2}\})$.