

Courtiet Julien (LIPN, Paris 13)
Yeats Karen (Univ of Waterloo)

Terminal Chords in Connected Chord Diagrams

Séminaire LIX
5 octobre 2016



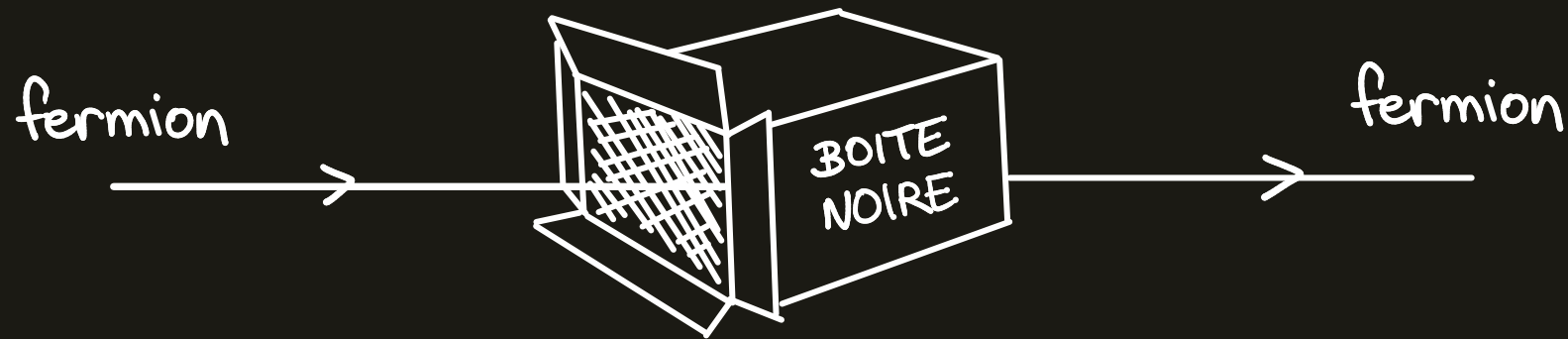
Petit jeu
en attendant :
ceci parodie une
affiche de film.
Lequel?

[illegible]

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats

(théorie de Yukawa)



→ fermion (électron)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats
(théorie de Yukawa)



→ fermion (électron)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats
(théorie de Yukawa)



→ fermion (électron) - - - - - méson  (photon)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats
(théorie de Yukawa)

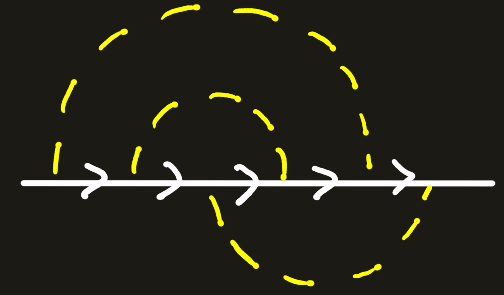
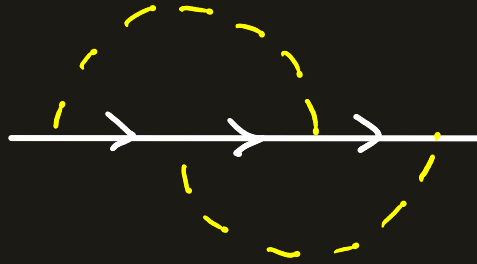


propagateur sous forme de diagramme de Feynman

—→ fermion (électron) — — — — — méson  (photon)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

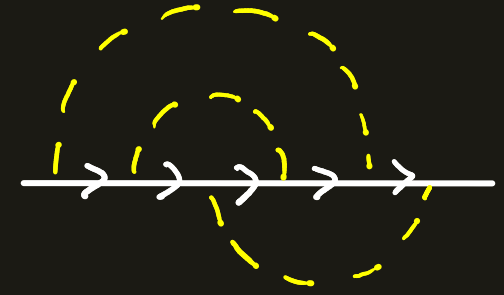
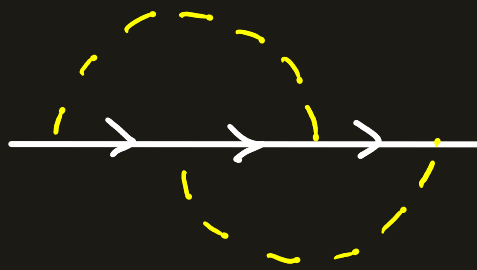
vue par Karen Yeats



→ fermion (électron) - - - - - méson  (photon)

THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats



$$G(x, L) = \sum_{\substack{\mathcal{D} \text{ diagramme} \\ \text{de Feynman}}} \phi_{\mathcal{D}}(L) x^{\text{taille de } \mathcal{D}}$$

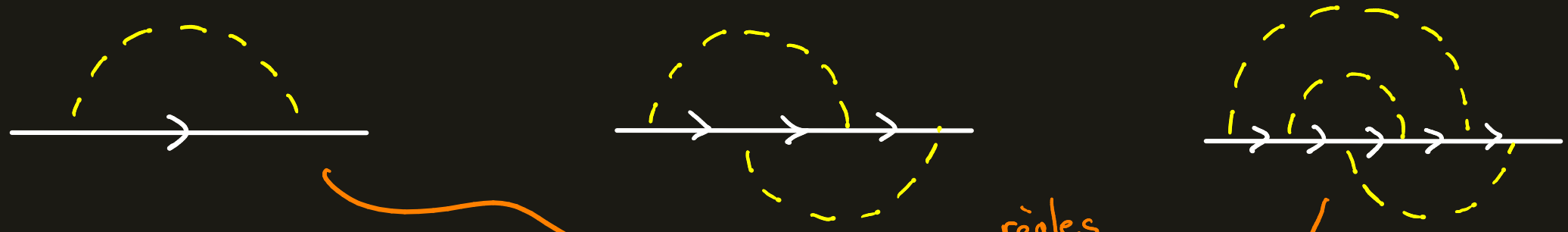
va être solution d'une équation de Dyson-Schwinger dite combinatoire.

 fermion (électron)
 

 méson (photon)

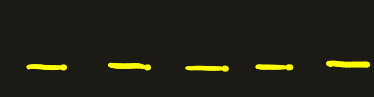
THÉORIE DES CHAMPS QUANTIQUES

vue par Karen Yeats



$$G(x, L) = \sum_{\mathcal{D} \text{ diagramme de Feynman}} \underbrace{\phi_{\mathcal{D}}(L)}_{\text{règles de Feynman}} \propto^{\text{taille de } \mathcal{D}}$$

va être solution d'une équation de Dyson-Schwinger dite combinatoire.

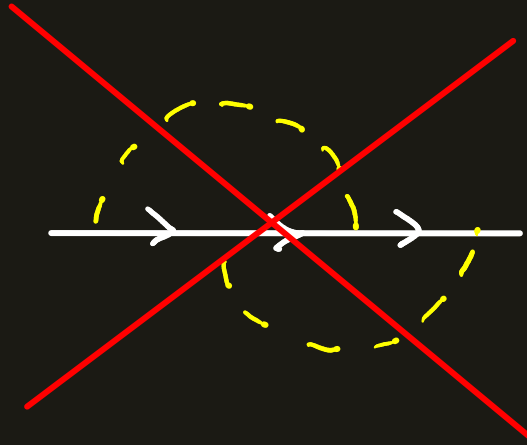

 fermion (électron)
 
 méson  (photon)

LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



↑
propagateur
à une boucle

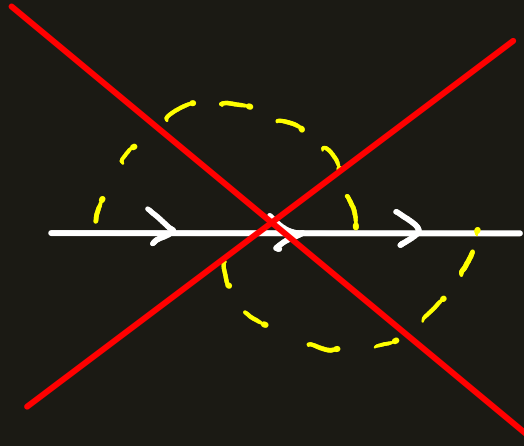


→ fermion (électron)

----- méson $\begin{array}{c} \text{B} \\ \updownarrow \\ \hline \end{array}$ (photon)

LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



 fermion (électron)
  méson  (photon)

LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



LE CADRE DE CET EXPOSÉ

Imbrications successives du propagateur à 1 boucle



$$1 - G(x, L) = \sum_{\substack{\mathcal{D} \text{ itéré du} \\ \text{propagateur à} \\ 1 \text{ boucle}}} \phi_{\mathcal{D}}(L) x^{\text{taille de } \mathcal{D}}$$

va être solution de l'équation de Dyson-Schwinger:

$$G(x, L) = 1 - x G(x, \frac{\partial}{\partial(-p)})^{-1} (e^{-Lp} - 1) F(p)|_{p=0}$$

où $F(p)$ = intégrale de Feynman régul. du propagateur à 1 boucle $\approx \phi_{\text{diagramme}}(p)$

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

! GROSSE FORMULE!

La précédente équation admet pour solution:

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

! GROSSE FORMULE!

La précédente équation admet pour solution :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

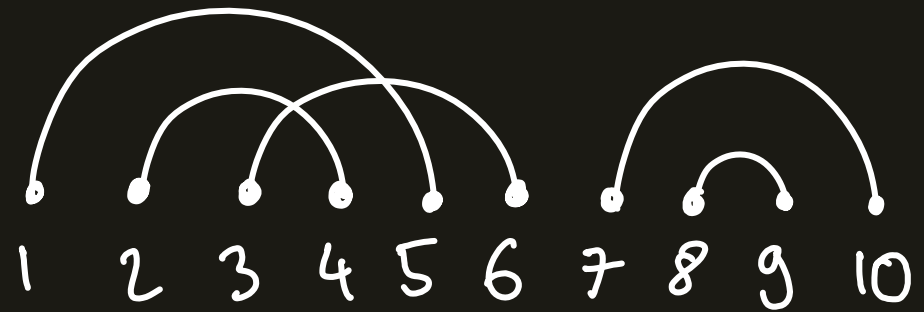
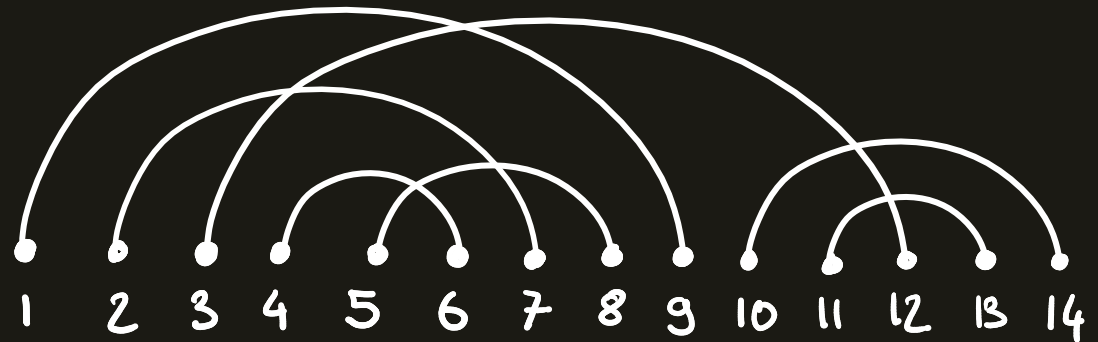


diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."



DÉFINITIONS

3 composantes connexes:

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

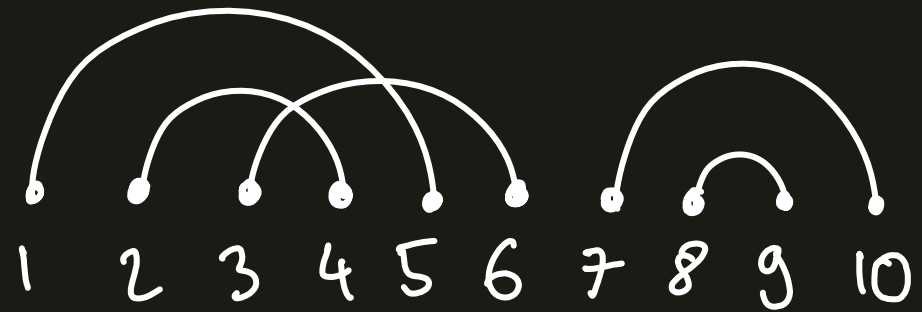
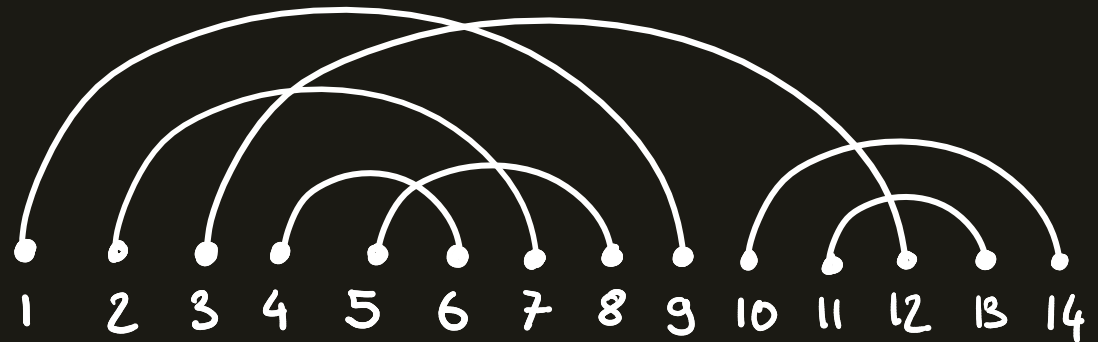


diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

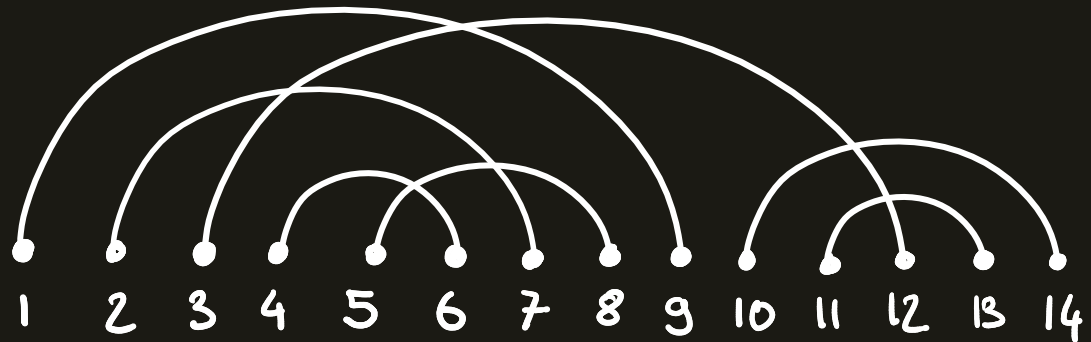
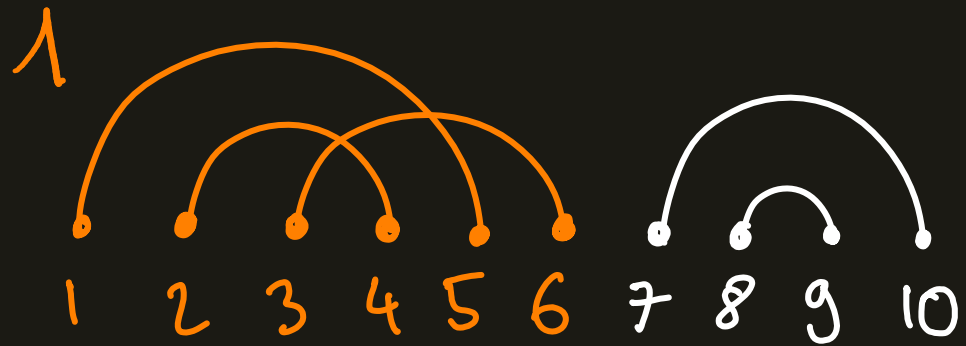


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

3 composantes connexes:

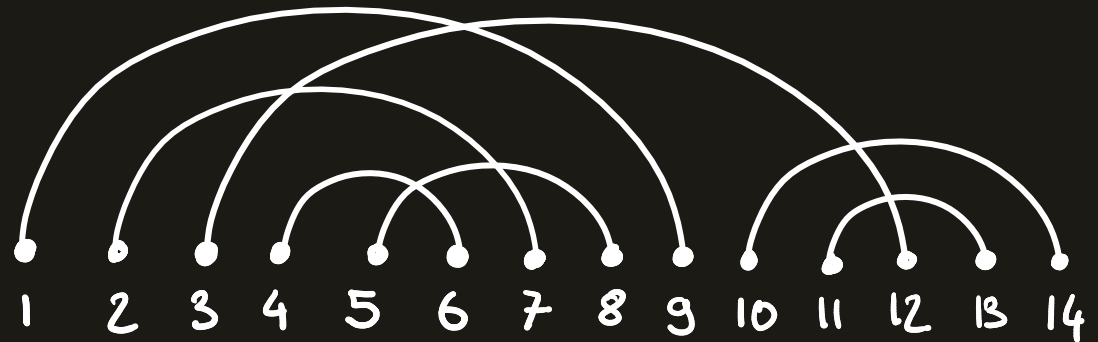
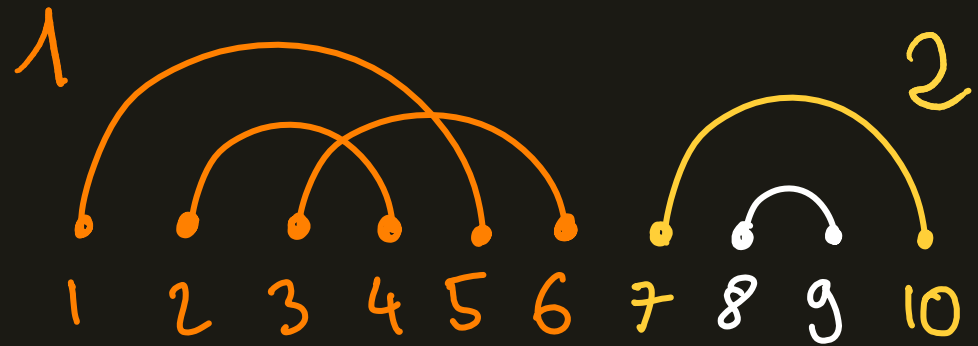


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

3 composantes connexes:

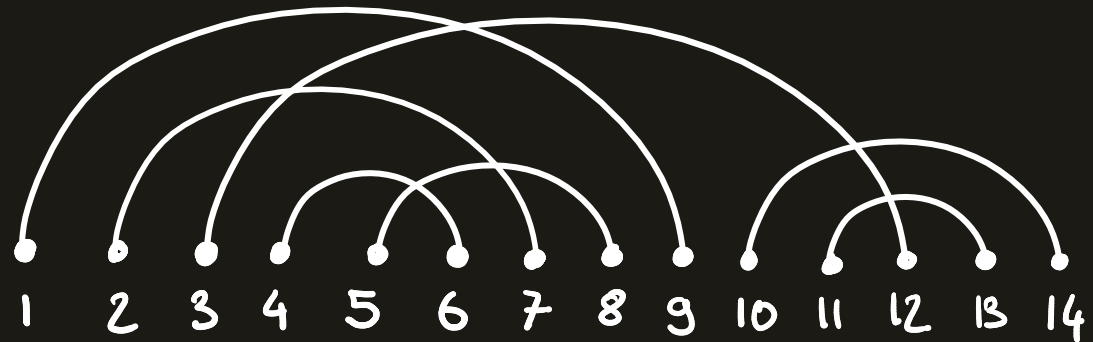


DÉFINITIONS

diagramme de n cordes
= appariement de
l'ensemble $\{1, \dots, 2n\}$

diagramme connexe =
"tout tient en un bloc."

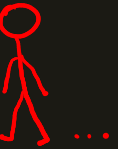
3 composantes connexes:



SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :



$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \checkmark \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :

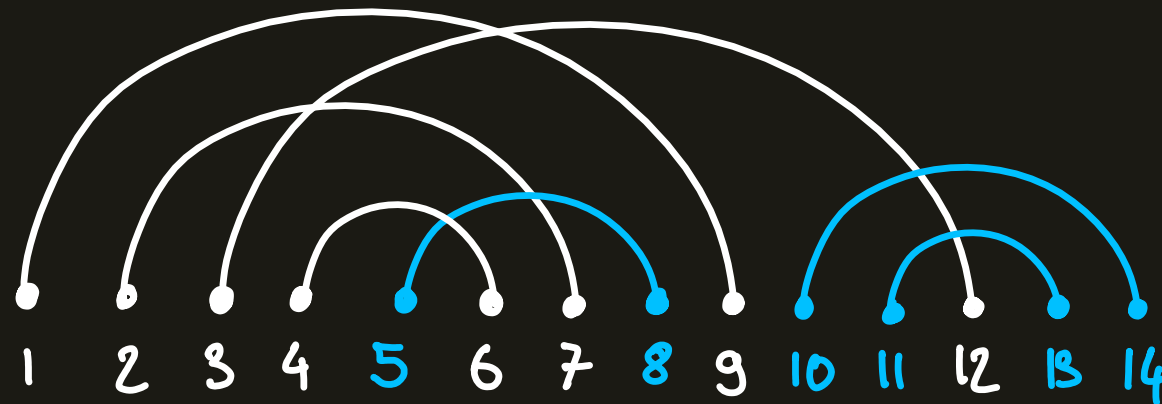
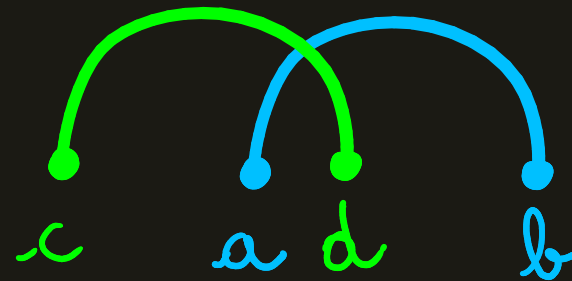


$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \checkmark \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

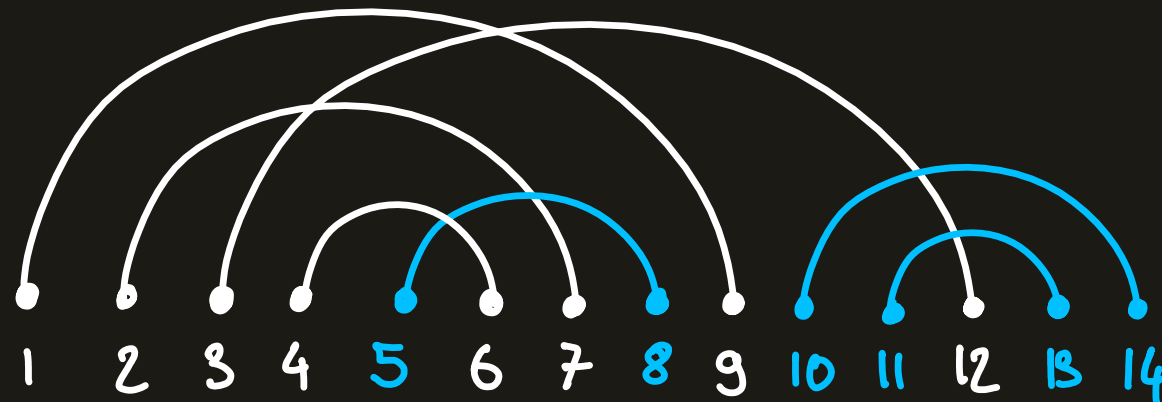
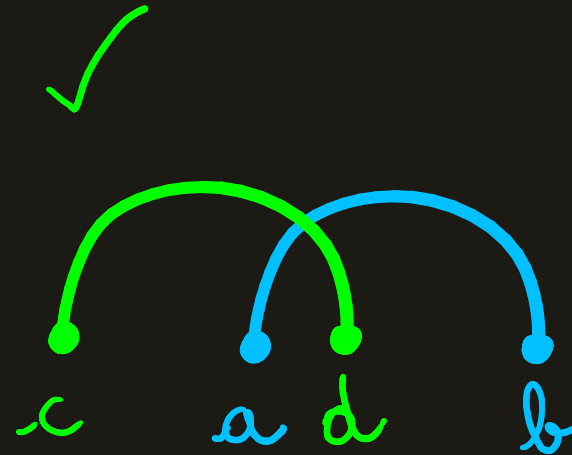
DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



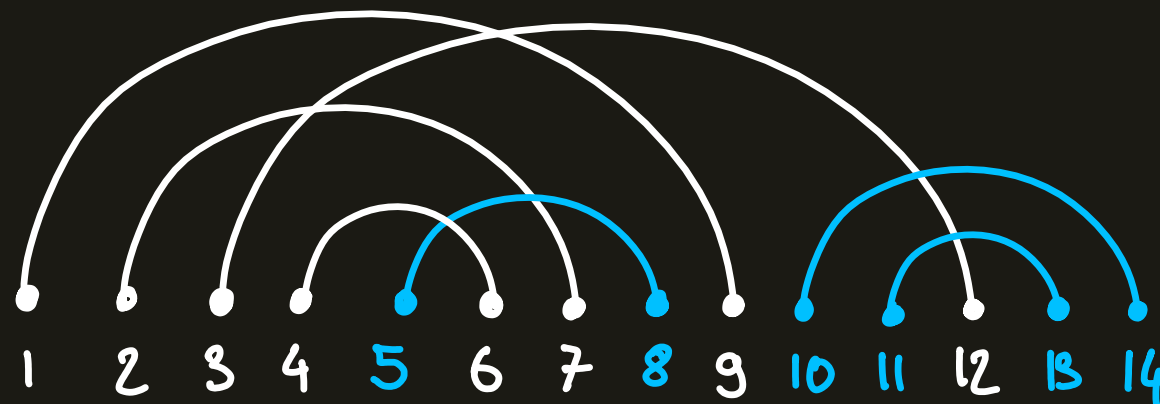
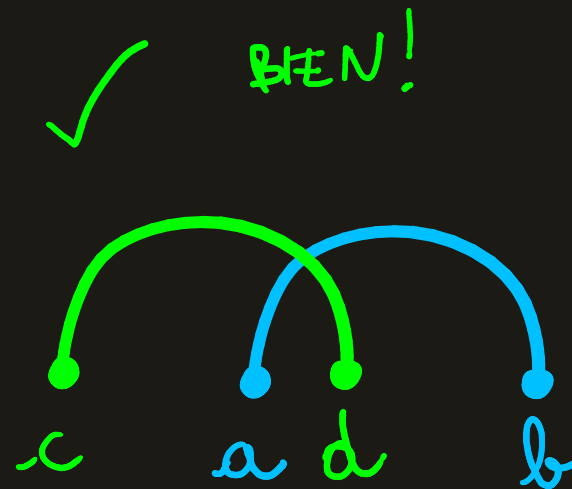
DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



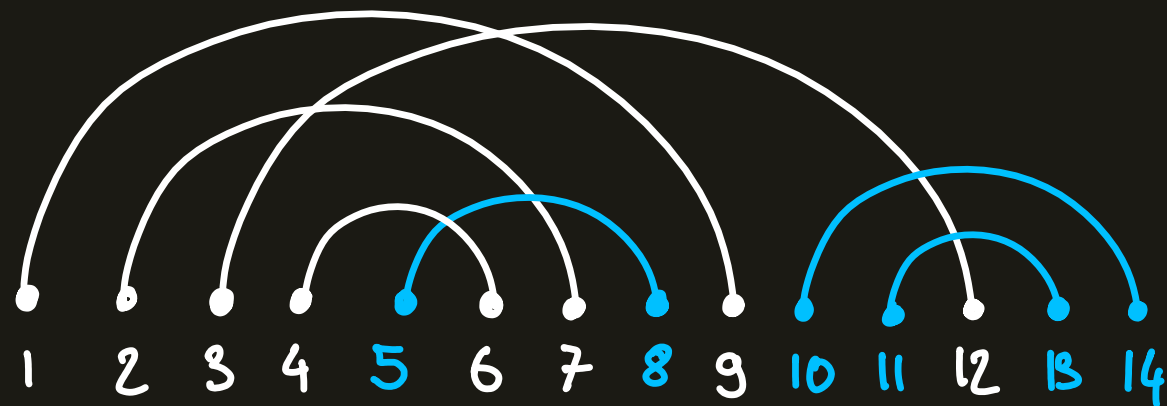
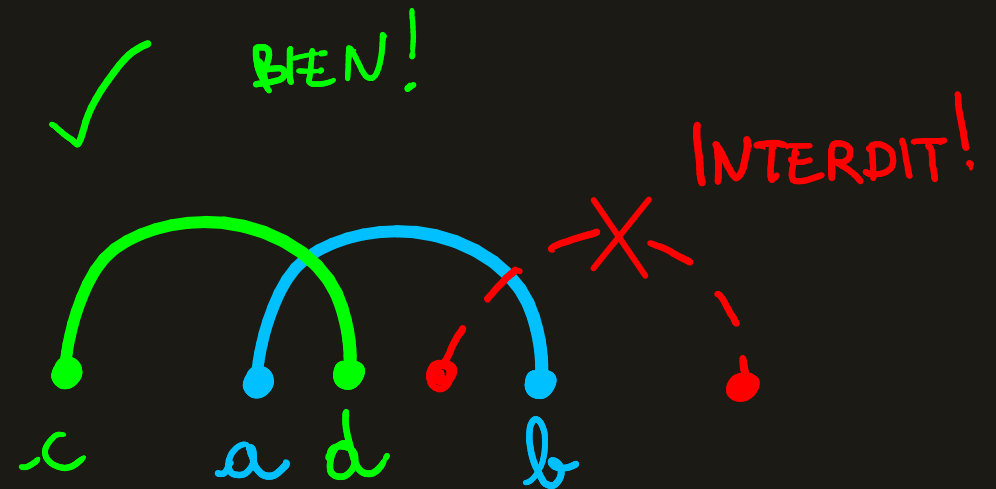
DÉFINITIONS

corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



DÉFINITIONS

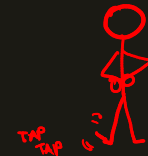
corde terminale =
corde (a, b) telle que
si (c, d) intersecte (a, b) ,
alors $c < a$.



SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :



$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \checkmark \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C \checkmark}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :

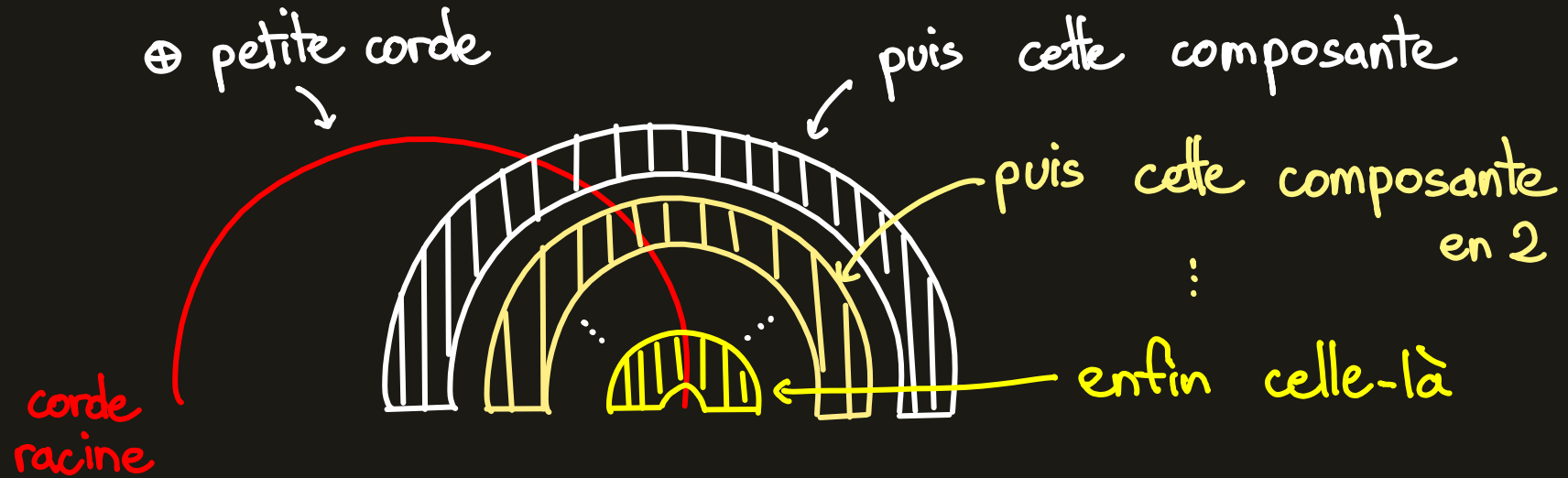
$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \checkmark \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C \checkmark}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

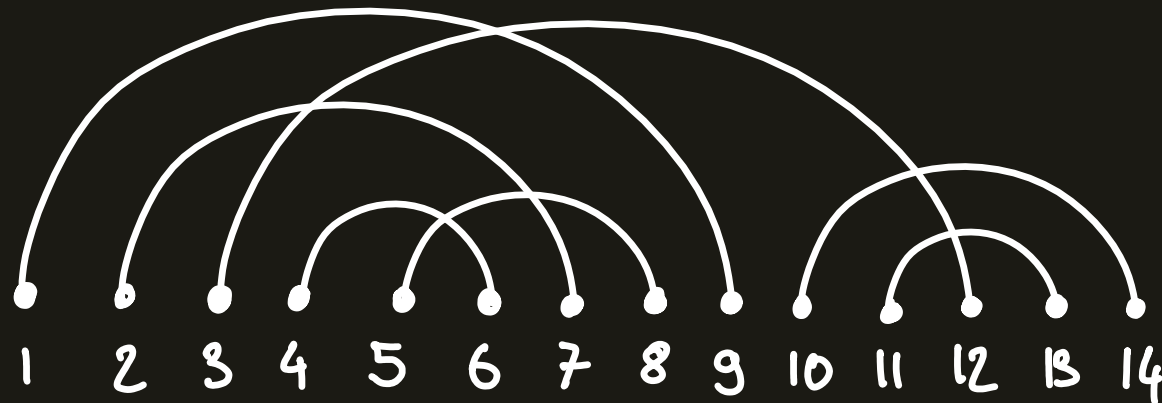


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

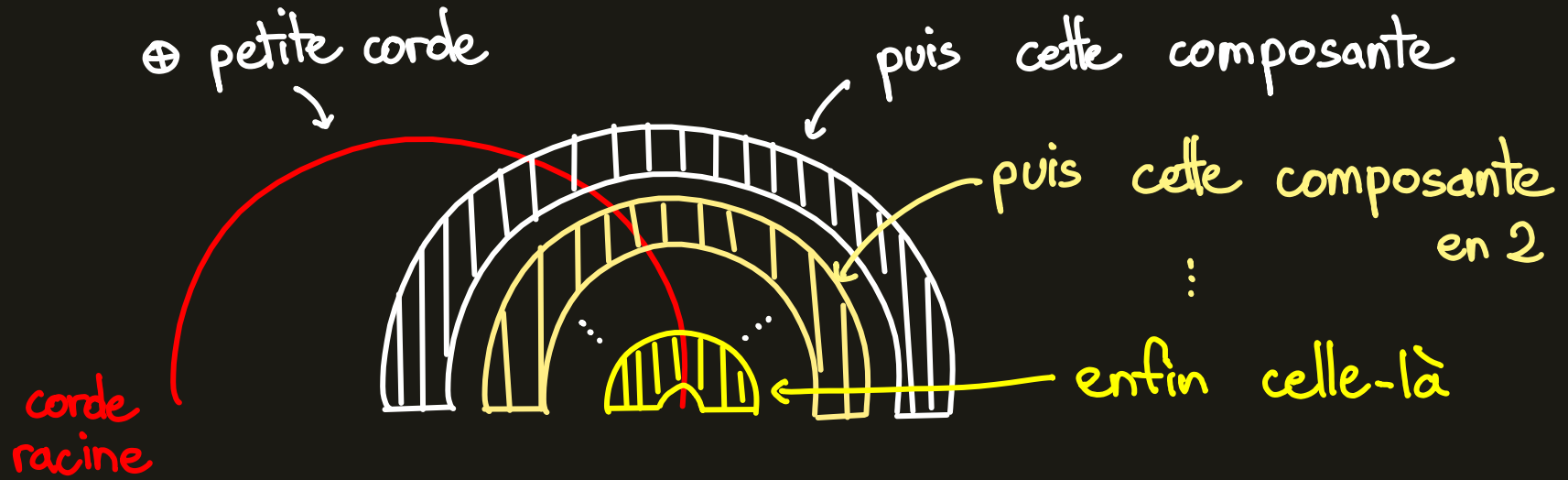


Exemple :

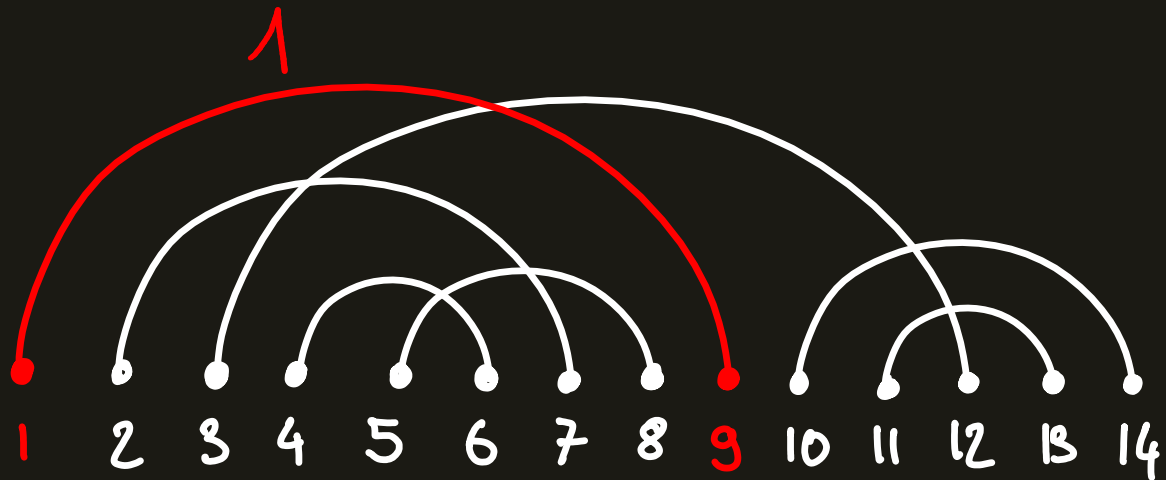


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

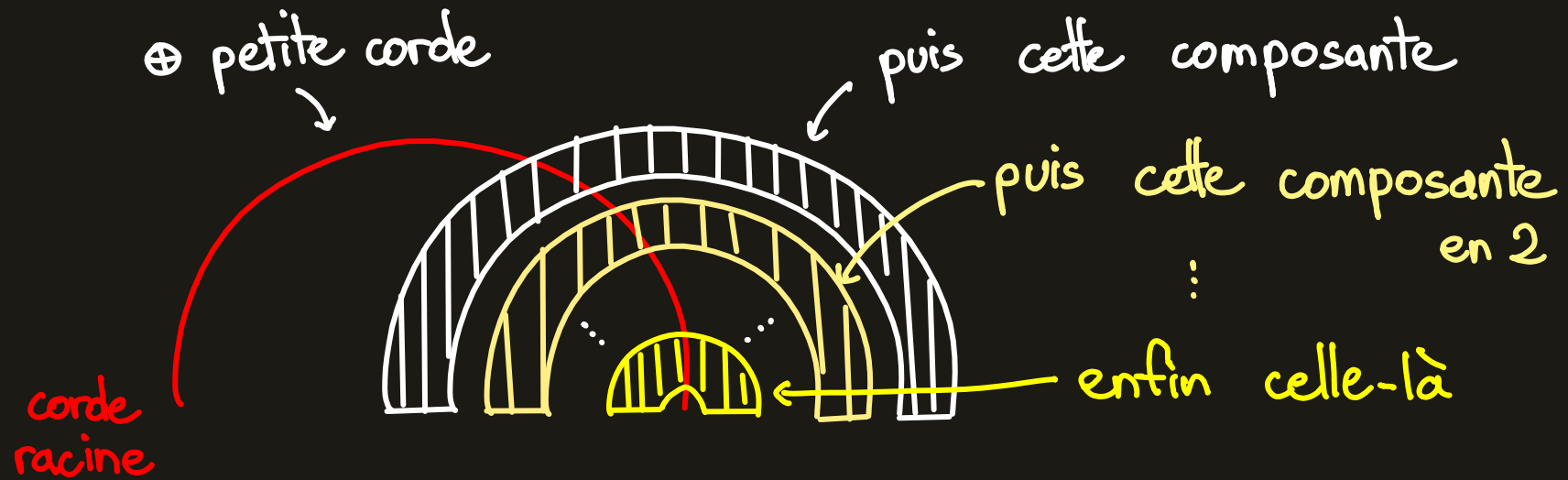


Example:

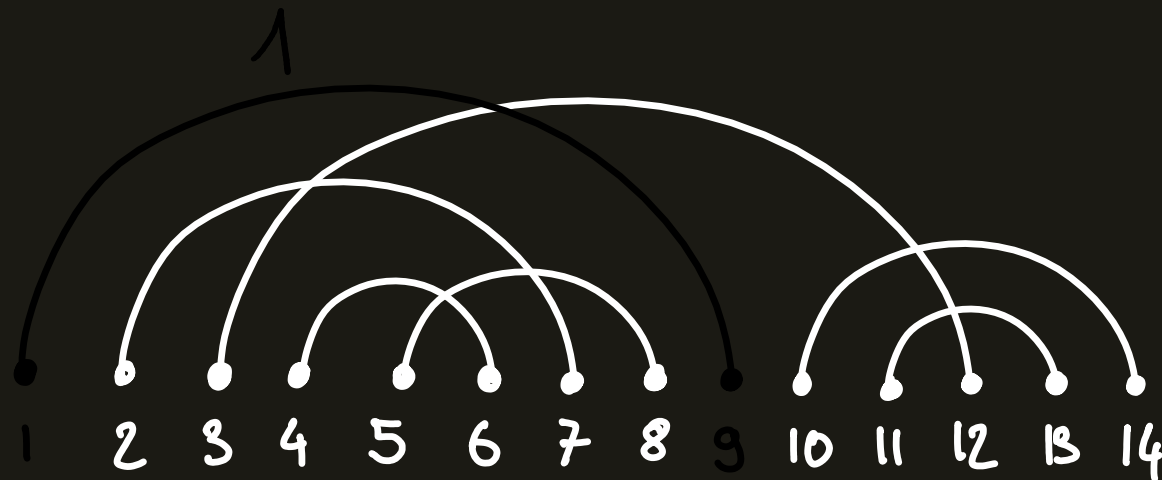


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

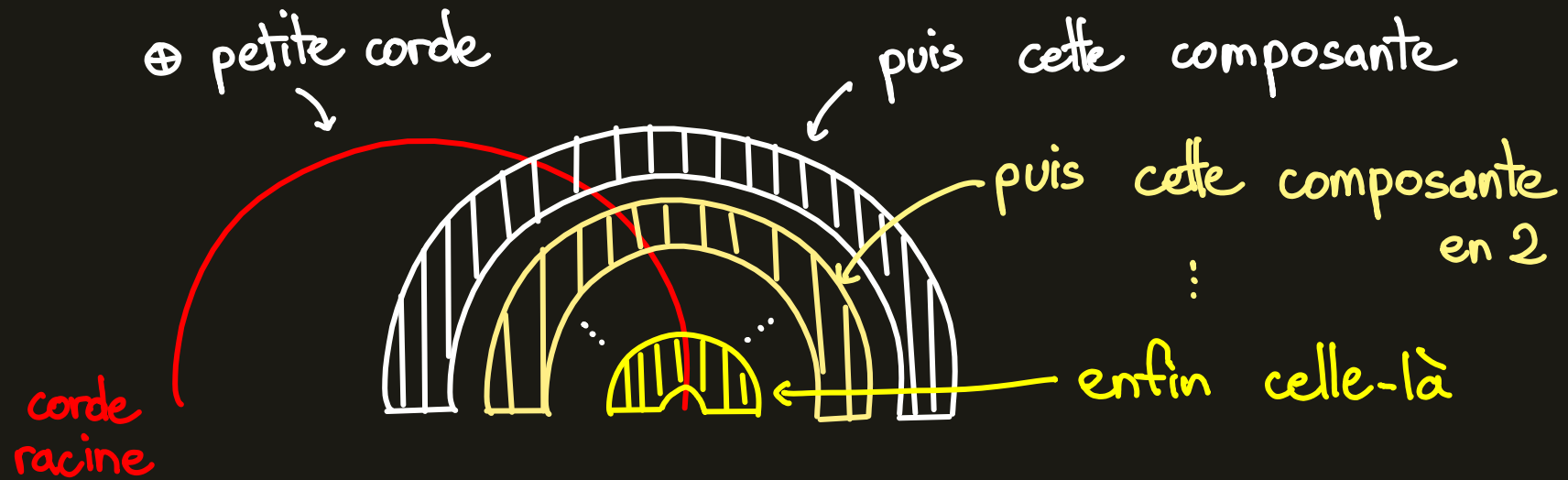


Exemple :

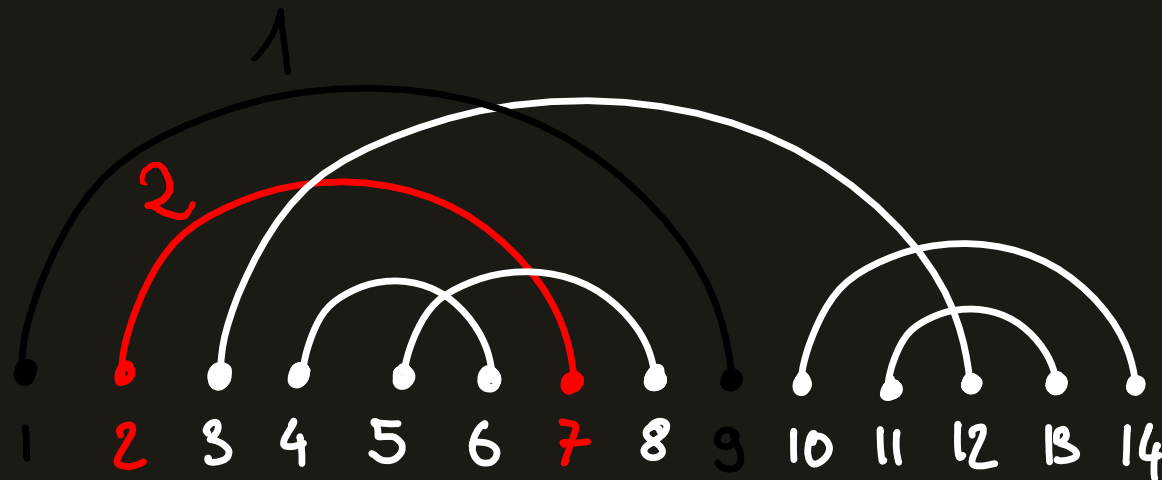


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

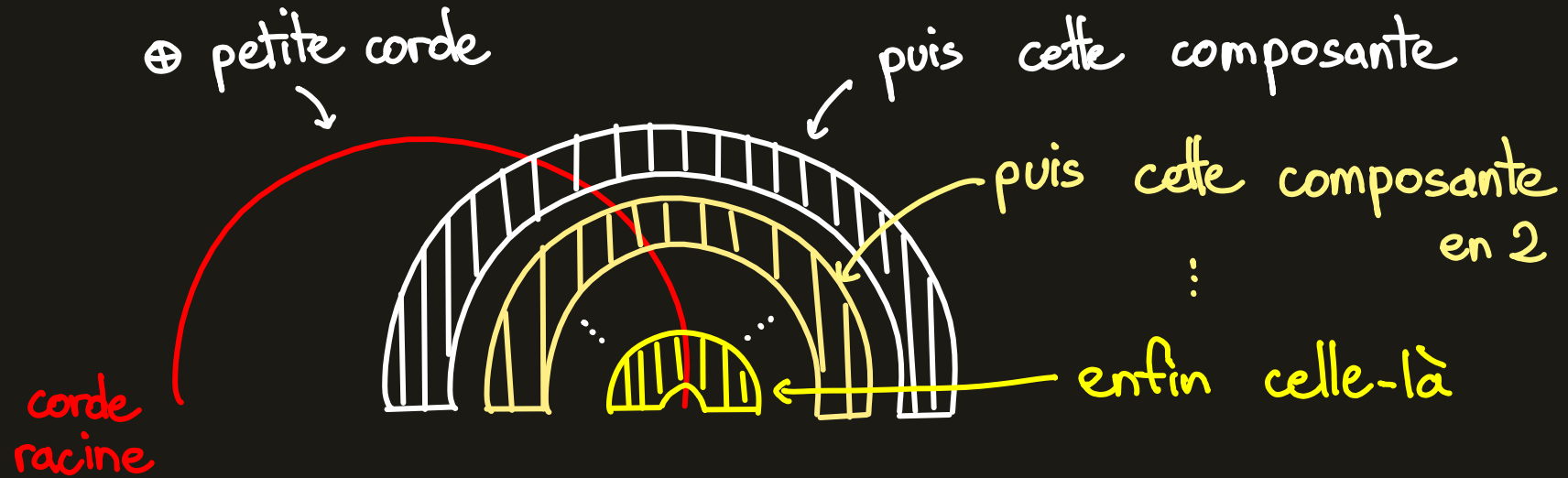


Exemple :

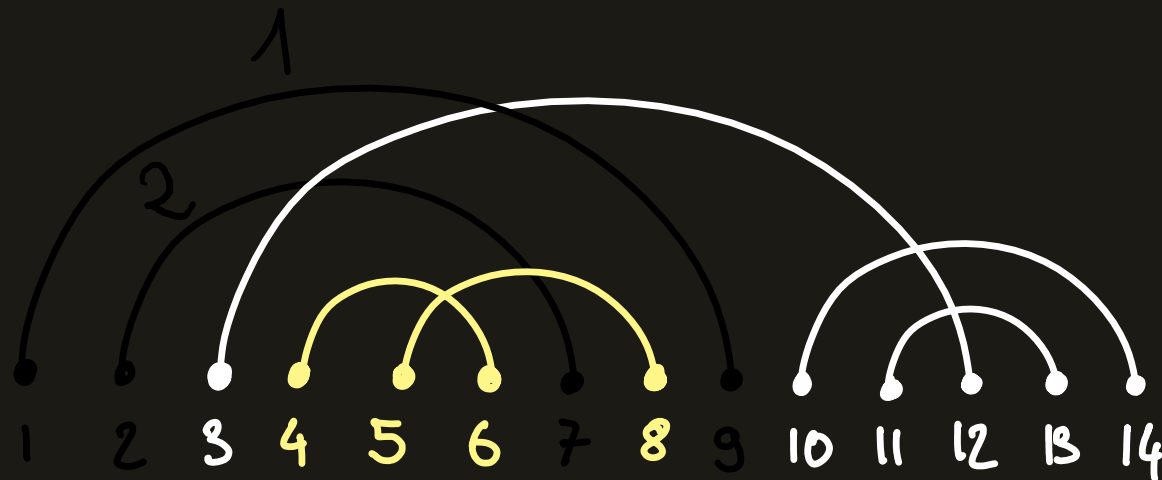


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

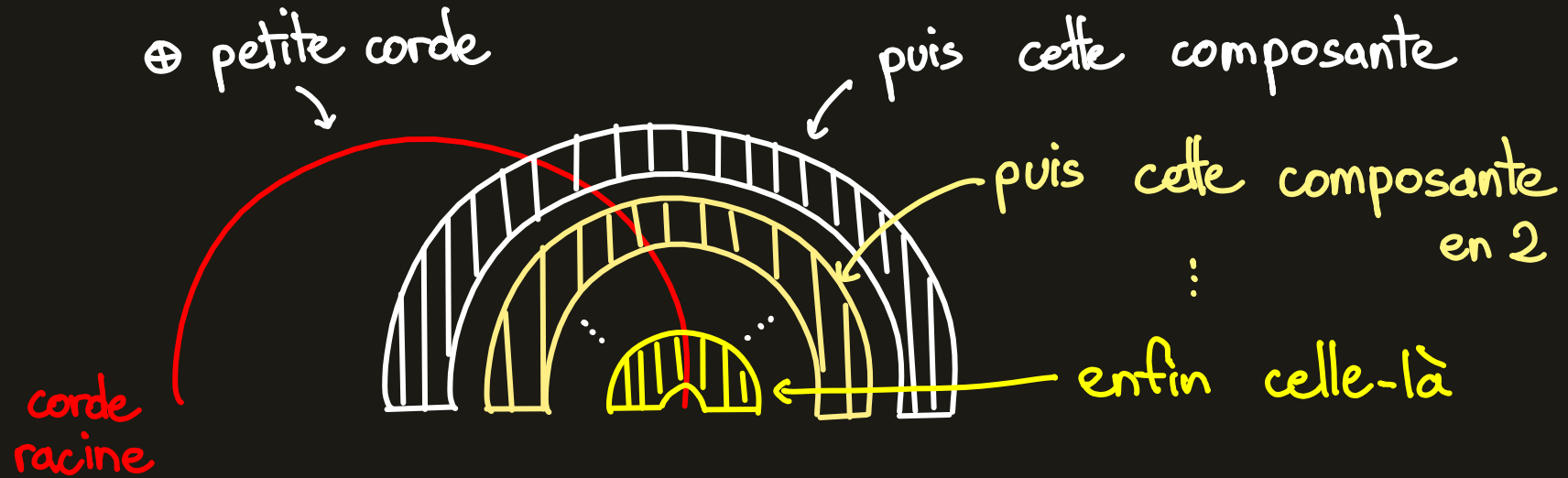


Exemple :

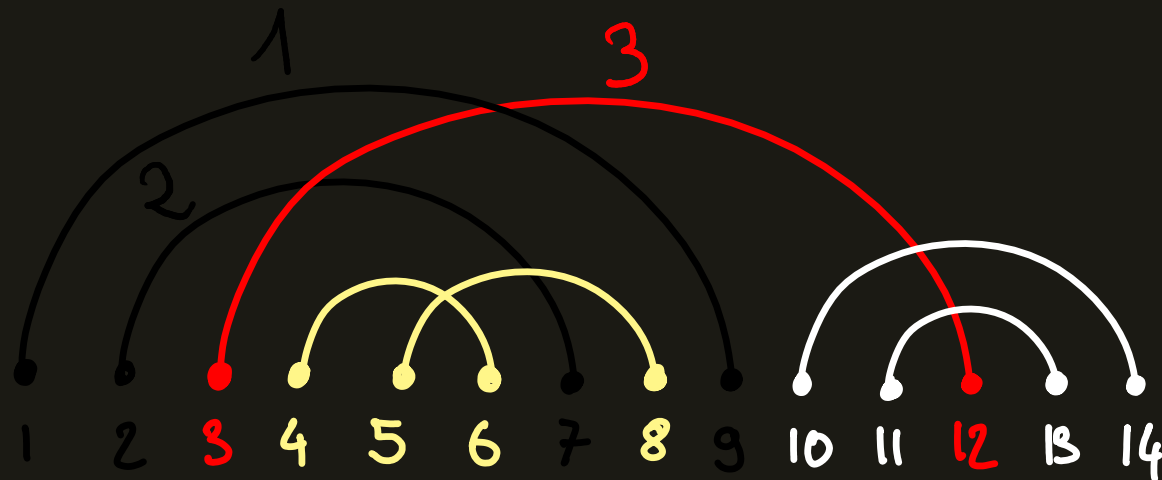


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

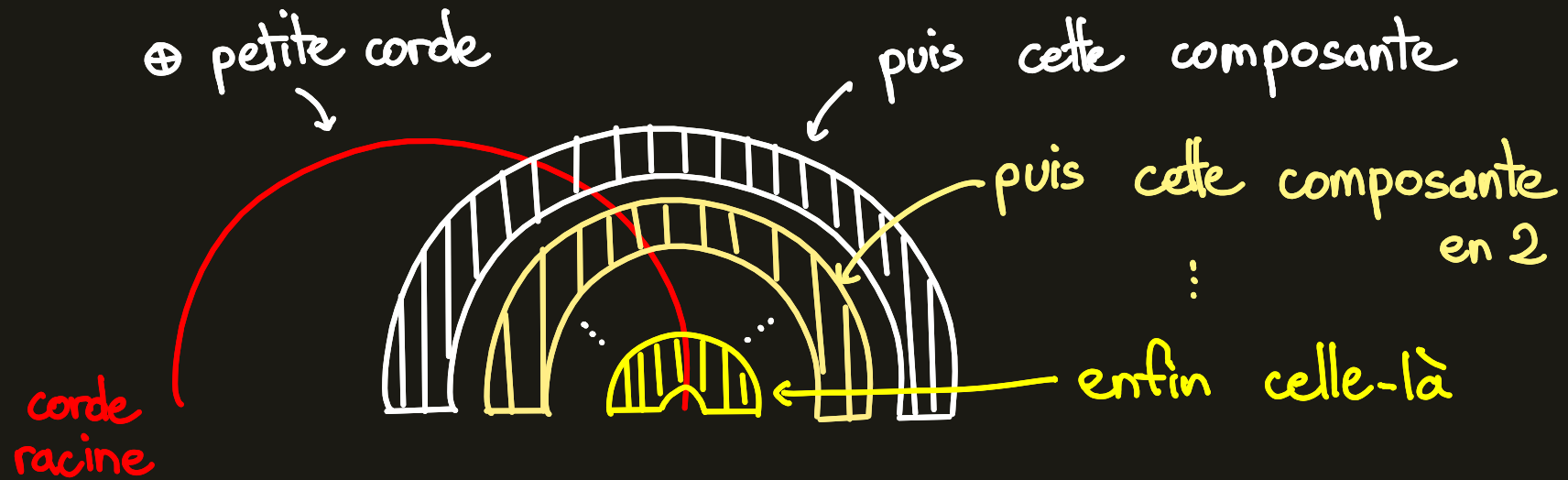


Exemple :

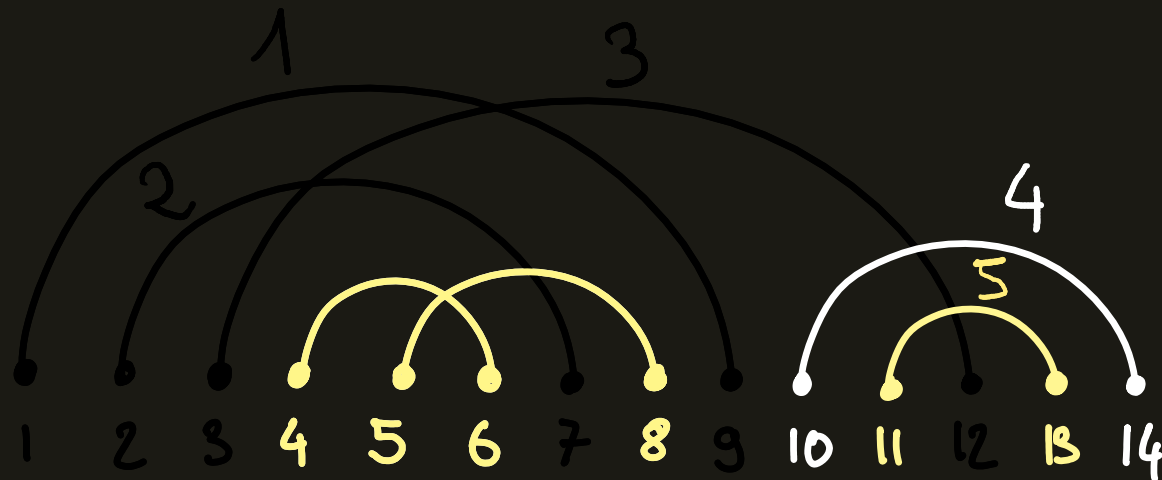


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

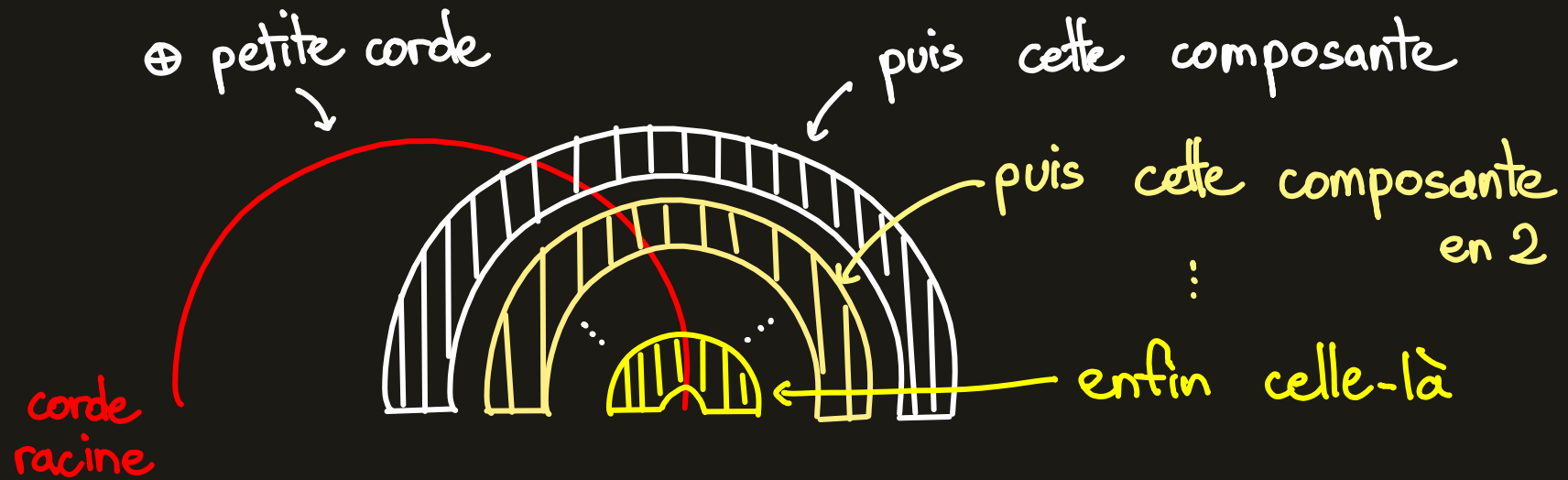


Exemple :

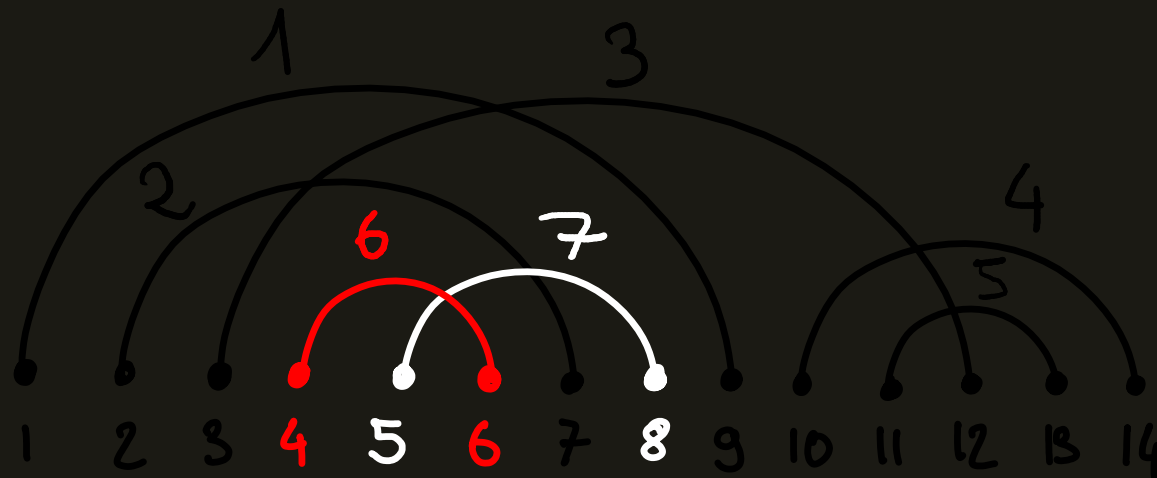


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

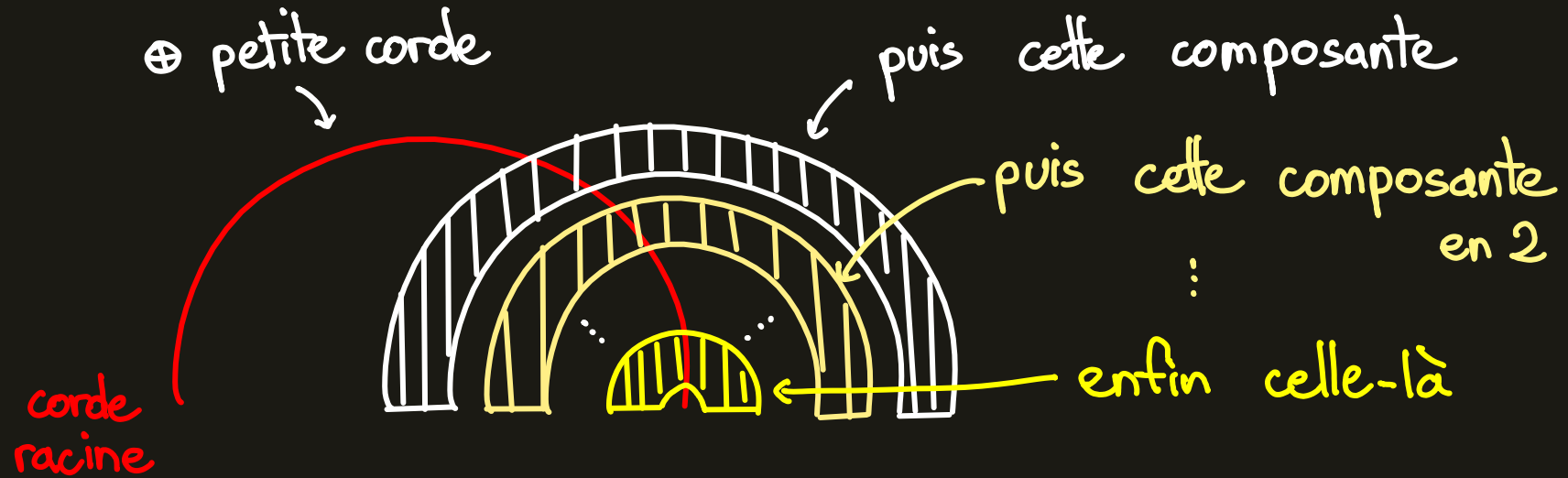


Exemple :

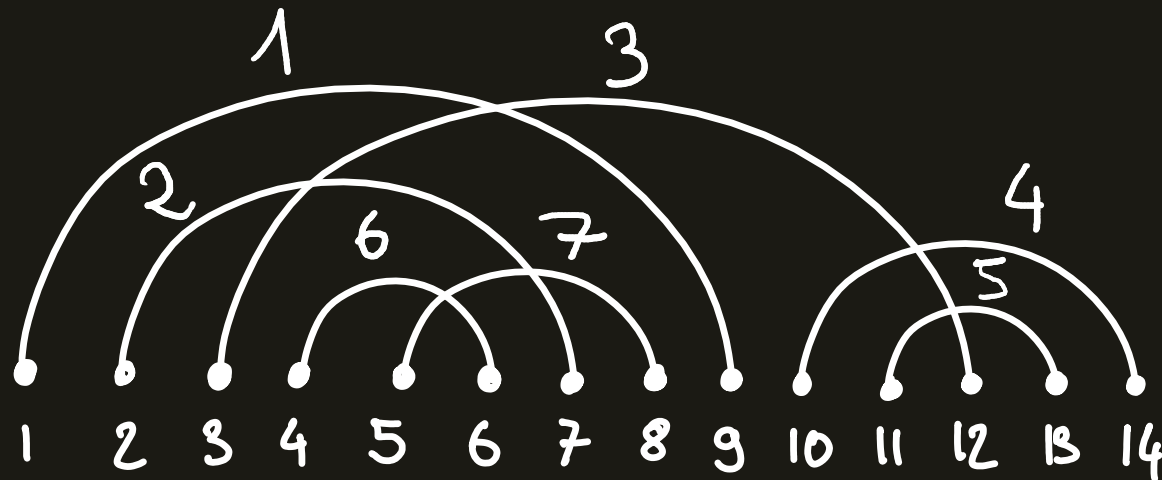


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

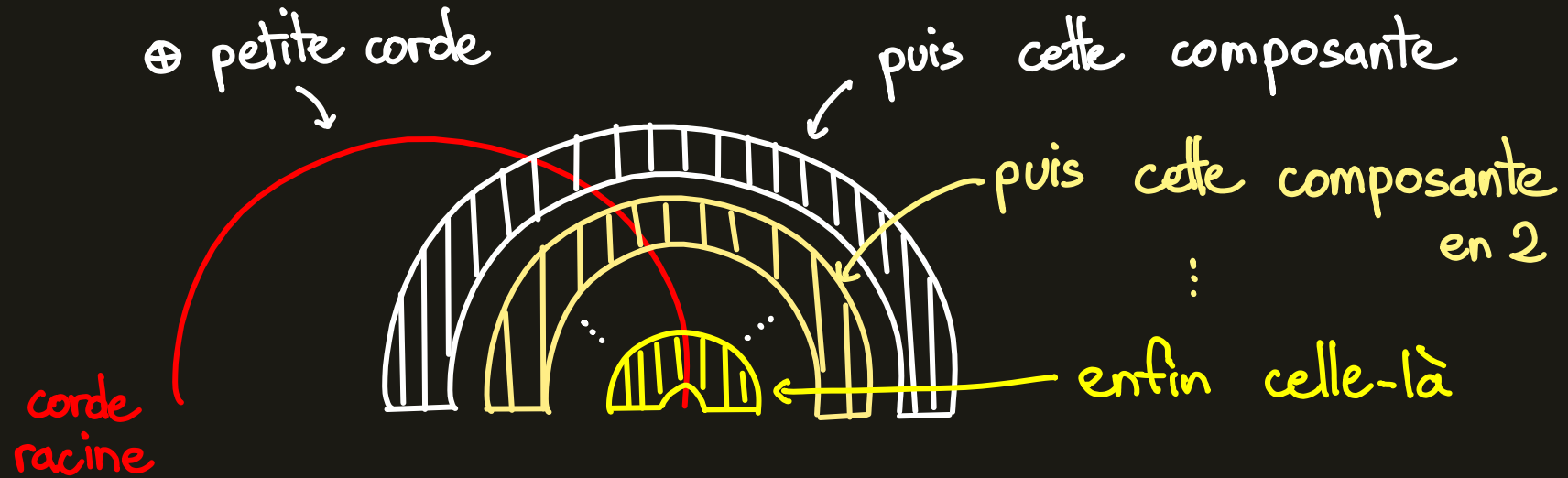


Exemple :

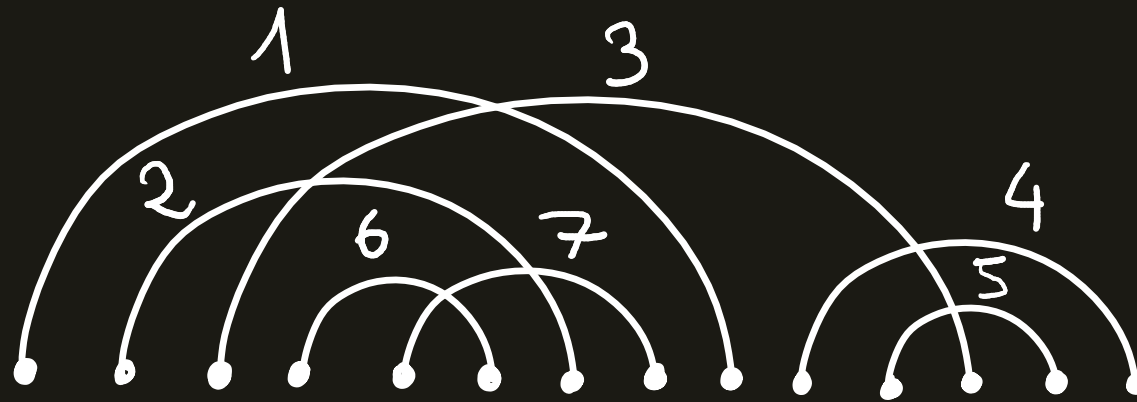


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :

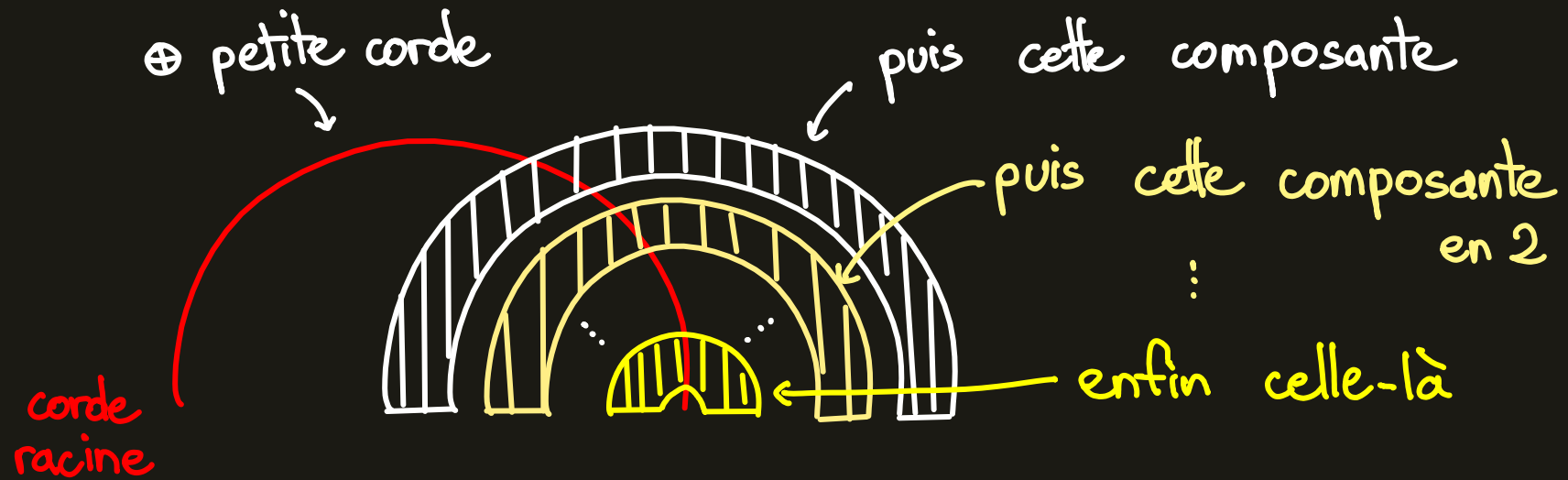


Exemple :

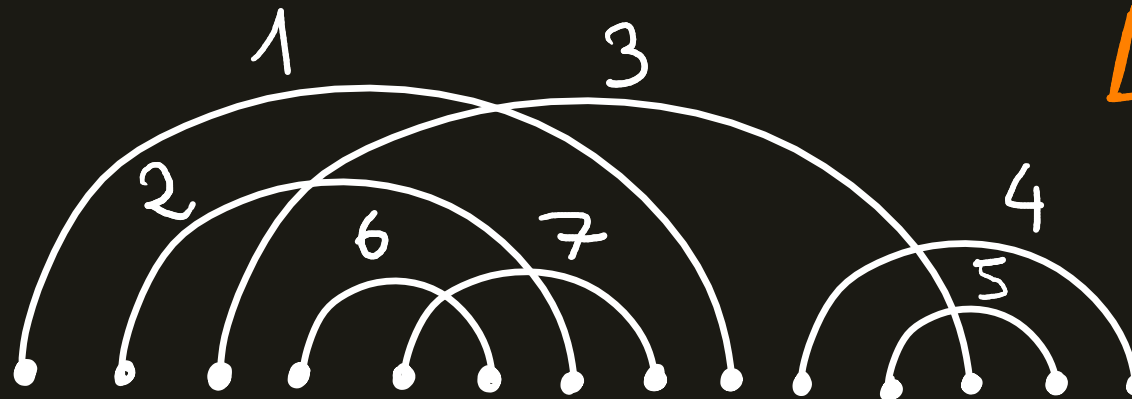


ORDRE D'INTERSECTION

Règle :



Exemple :



⚠ ordre gauche-droite
+
ordre d'intersection

SOLUTION DE L'ÉQUATION DE DYSON-SCHWINGER

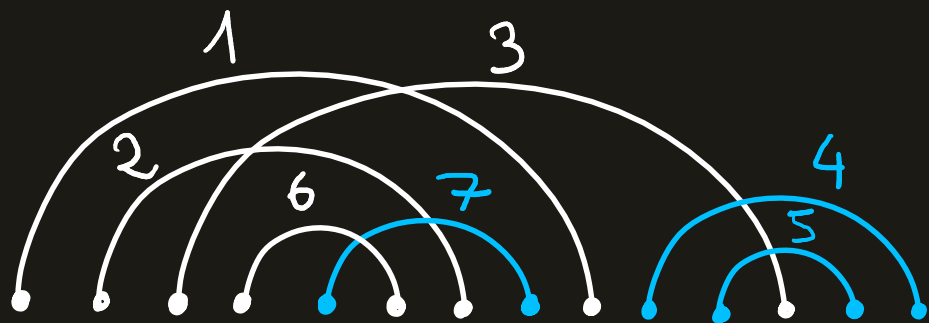
Théorème [Marie, Yeats]

La précédente équation admet pour solution :

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \checkmark \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \checkmark \\ \text{des cordes terminales de } C \checkmark}} \frac{L^i}{i!} x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

où $F(p) = \frac{f_0}{p} + f_1 + f_2 p + f_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

Ex:



$$k=3 \quad t_1=4 \quad t_2=5 \quad t_3=7$$

$$(*) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 4 \\ x^7 \times b_0^4 \times b_{4-i} \times b_1 \times b_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{C \text{ diagramme de cordes connexe}} \frac{L^i}{i!}$$

tel que $t_1 \geq i$
où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$
désigne les positions
des cordes terminales de C

$$x^{|C|} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

(*)

où $F(p) = \frac{b_0}{p} + b_1 + b_2 p + b_3 p^2 + \dots$ (intégrale de Feynman du propagateur à 1 boucle)

OBJECTIF

Comprendre asymptotiquement $x^{|c|} f_0^{|c|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}}$

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $x^{|c|} f_0^{|c|-k} f_{t_1-t_1} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}}$

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0^{|c|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0 |c| - k f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

écart entre deux
cordes terminales

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0$ $|c|-k$ f_{t_1-i} $f_{t_2-t_1}$ $f_{t_3-t_2}$ $\dots$ $f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

écart entre deux
cordes terminales

distribution
uniforme

OBJECTIF

nombre de
cordes terminales

Comprendre asymptotiquement $\propto |c| f_0 |c|^{-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$

position de la première
corde terminale

écart entre deux
cordes terminales

développement
log-dominant

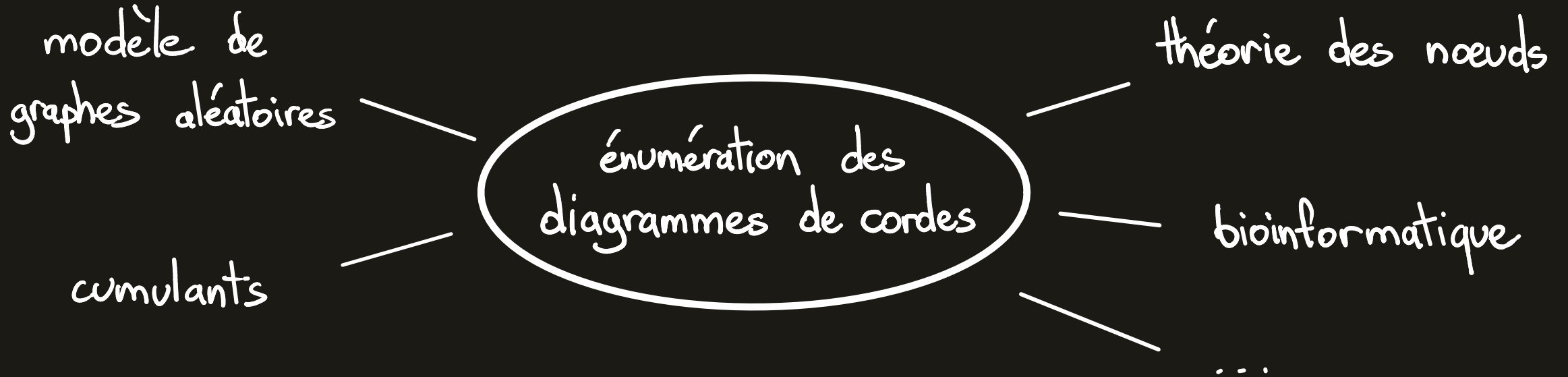
distribution
uniforme

(+ significatif pour la physique)

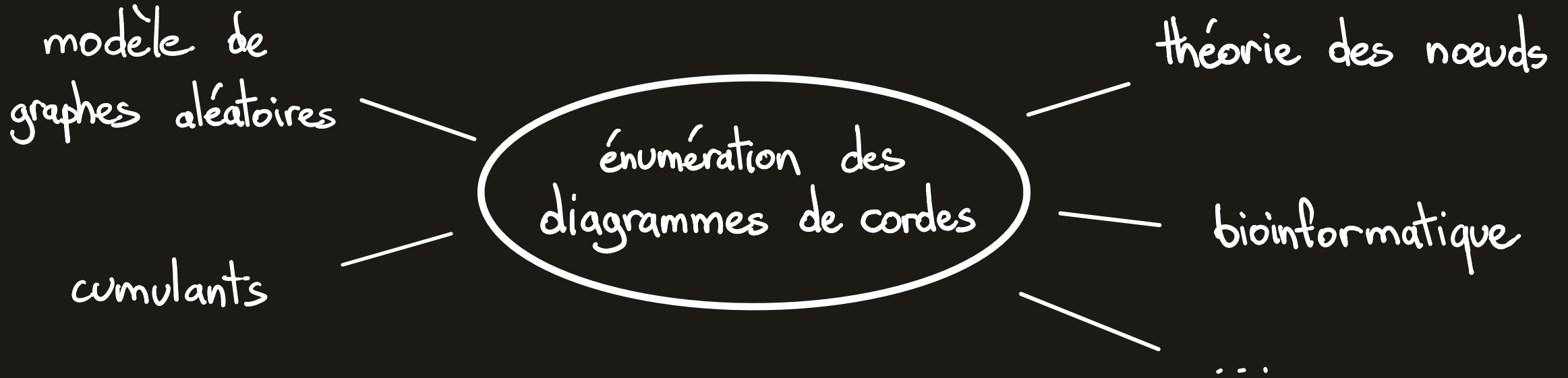
CE QU'IL FAUT SAVOIR SUR LES DIAGRAMMES DE CORDES CONNEXES



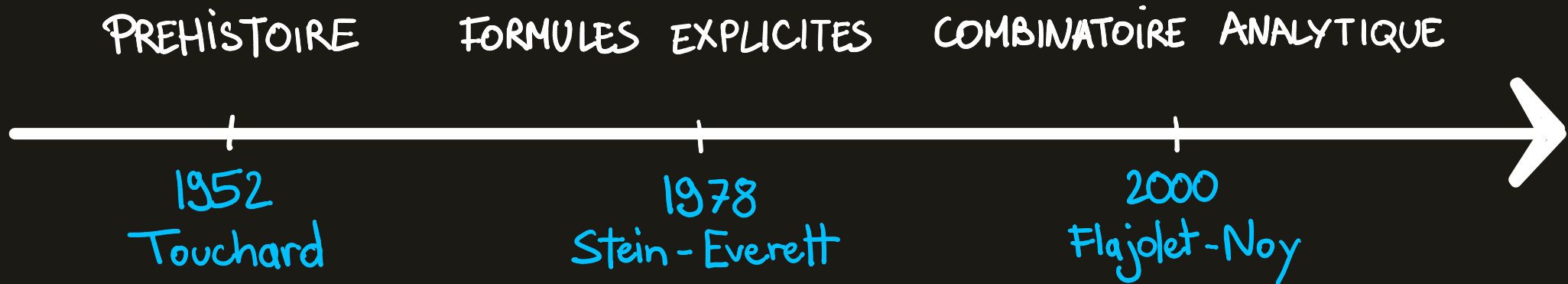
PETIT ÉTAT DES LIEUX



PETIT ÉTAT DES LIEUX



Énumération des diagrammes connexes :



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

nombre de diagrammes à n cordes = ???



nombre de diagrammes **connexes** à n cordes = c_n

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 4 \quad c_4 = 27 \quad c_5 = 248$$



Formule de récurrence [Stein] $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

nombre de diagrammes à n cordes = $(2n-1)!!$

nombre de diagrammes **connexes** à n cordes = c_n

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 4 \quad c_4 = 27 \quad c_5 = 248$$



Formule de récurrence [Stein] $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k} \quad ?$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$

$k \leftarrow n-k$

Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

+ $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$

$k \leftarrow n-k$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) \times c_k \times c_{n-k}$$

Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

+ $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2(n-k)-1) \times c_{n-k} \times c_k$

$k \leftarrow n-k$

$$2c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2n-2) \times c_k \times c_{n-k}$$

% 2

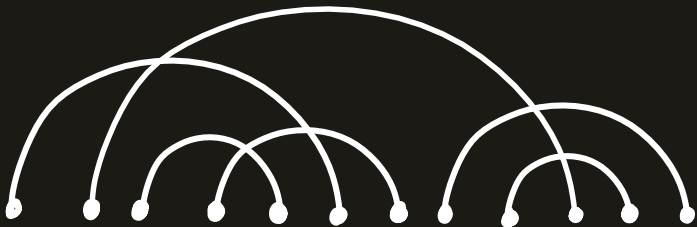
Formule: $c_n = (n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times c_{n-k}$

ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

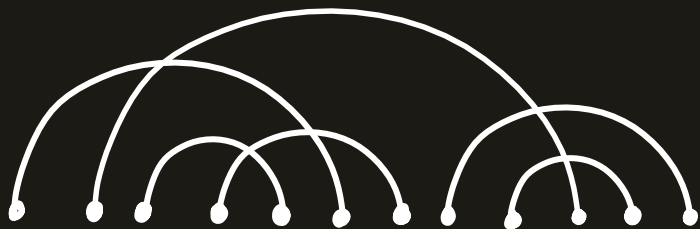
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?

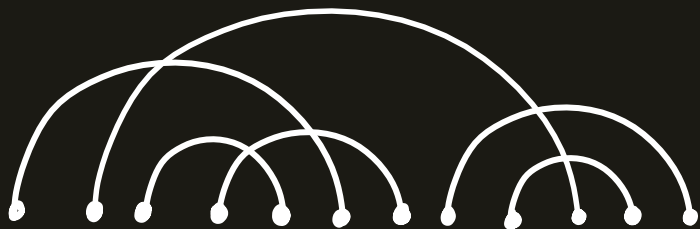


=

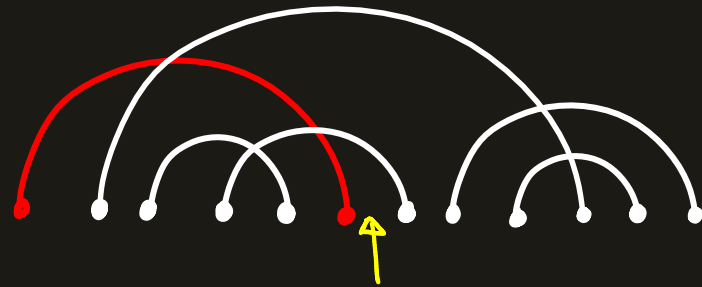


ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k} \quad ?$

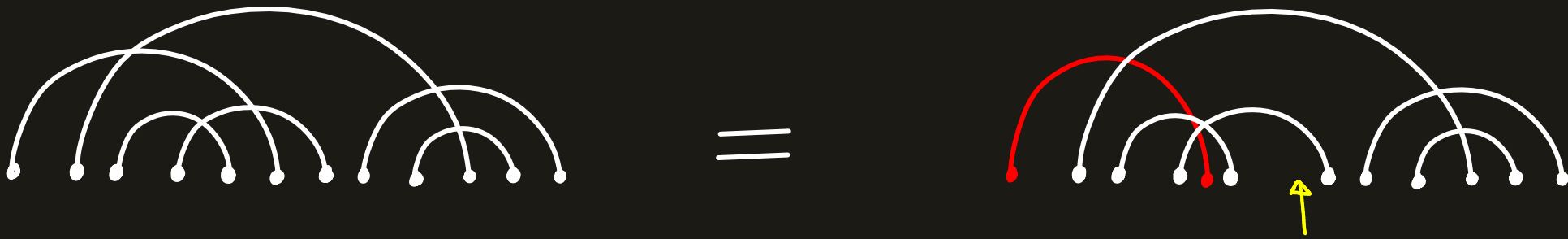


=



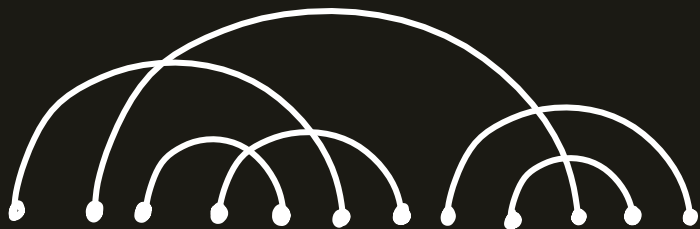
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k} \quad ?$

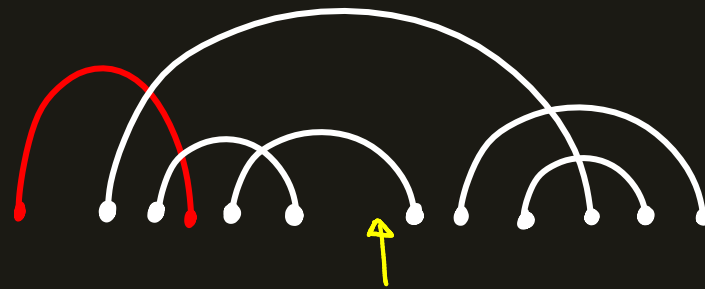


ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k} \quad ?$

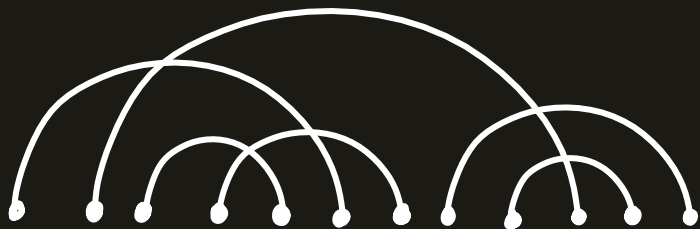


=

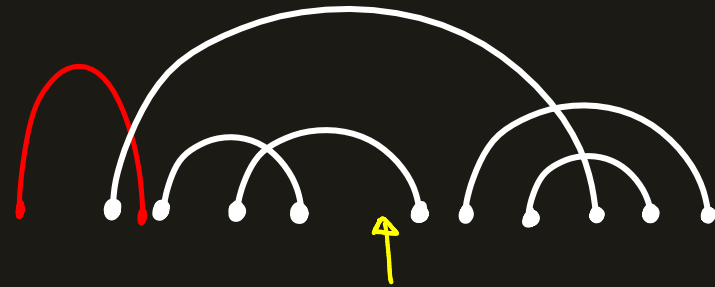


ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k} \quad ?$

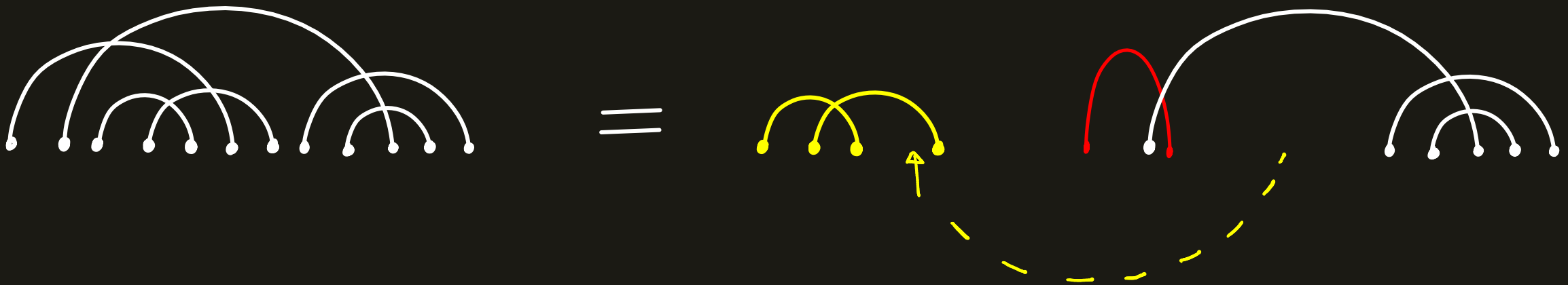


=



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



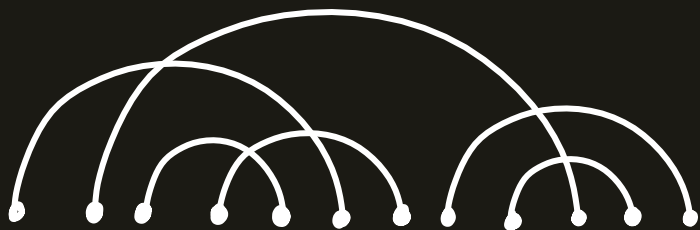
ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k} \quad ?$



ENUMÉRATION ÉLÉMENTAIRE

Preuve de $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \times c_k \times c_{n-k}$?



=



k cordes

$\oplus$



$n-k$ cordes

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!! \quad [\text{Stein-Everett}]$$

Corollaire : $P(\text{diagramme connexe}) = \frac{c_n}{(2n-1)!!} \rightarrow \frac{1}{e}$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

$$c_n \sim \frac{1}{e} \times (2n-1)!! \quad [\text{Stein-Everett}]$$

Corollaire: $P(\text{diagramme connexe}) = \frac{c_n}{(2n-1)!!} \rightarrow \frac{1}{e}$

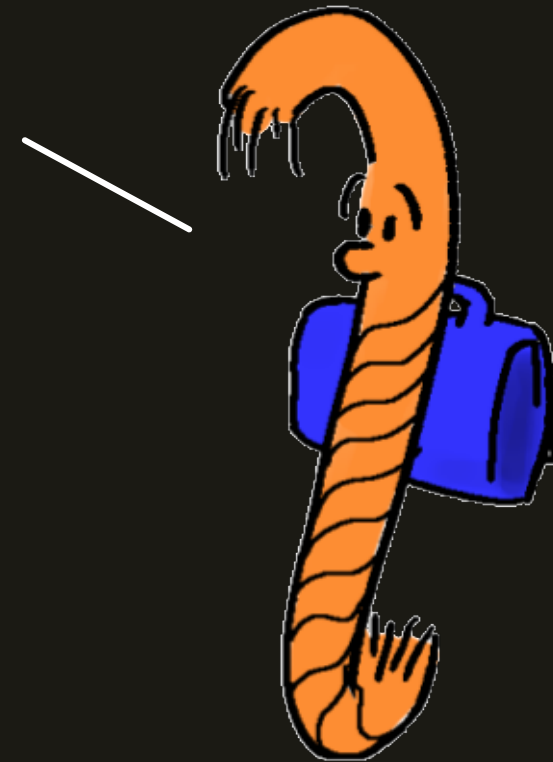
Plus fort

[Flajolet-Noy]

- nombre de composantes connexes $\sim \text{Poisson}(1)$
- $|C|$ - taille de la plus grande composante $\sim \text{Poisson}(1)$

CORDES TERMINALES DANS LES DÉVELOPPEMENTS LOG-DOMINANTS

JE SUIS
EN TERMINALE
MAIS JE NE SAIS
PAS CE QUE VEUT
DIRE "LOGUE"



DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{L^i}{i!} \propto |C| f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

Rappelez-vous

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{L^i}{i!}$$

$x^{|C|} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$
 ↑
 on veut minimiser les
 grandes puissances de x
 (car contribution plus faible)

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

Coefficient de $(Lx)^i x^{|C|-i}$ pour i proche de $|C|$?

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}}$$

$i \leq t_1 \leq |C|$

on veut minimiser les grandes puissances de x (car contribution plus faible)

Coefficient de $(Lx)^i x^{|C|-i}$ pour i proche de $|C|$?

- $|C| = i$: développement log-dominant [Krümer-Kreiger]
- $|C| = i + 1$: développement log-dominant d'après
- $|C| = i + l$: développement log-dominant d'après d'après... d'après
2 fois

DÉVELOPPEMENT(S) LOG-DOMINANT(S)

Théorème [Marie, Yeats]

$$G(x, L) = 1 - \sum_{i \geq 1} \sum_{\substack{C \text{ diagramme} \\ \text{de cordes connexe} \\ \text{tel que } t_1 \geq i \\ \text{où } t_1 < t_2 < \dots < t_k \\ \text{désigne les positions} \\ \text{des cordes terminales de } C}} \frac{(Lx)^i}{i!} x^{|C|-i} b_0^{|C|-k} b_{t_1-i} b_{t_2-t_1} b_{t_3-t_2} \dots b_{t_k-t_{k-1}}$$

$$i \leq t_1 \leq |C|$$

on veut minimiser les
grandes puissances de x
(car contribution plus faible)

Coefficient de $(Lx)^i x^{|C|-i}$ pour i proche de $|C|$?

- $|C| = i$: développement log-dominant
- $t_1 = |C|$
- C n'a qu'une seule corde terminale

SEULEMENT UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes connexes à n cordes et une seule corde terminale

$$\parallel \\ (2n-3)!!$$

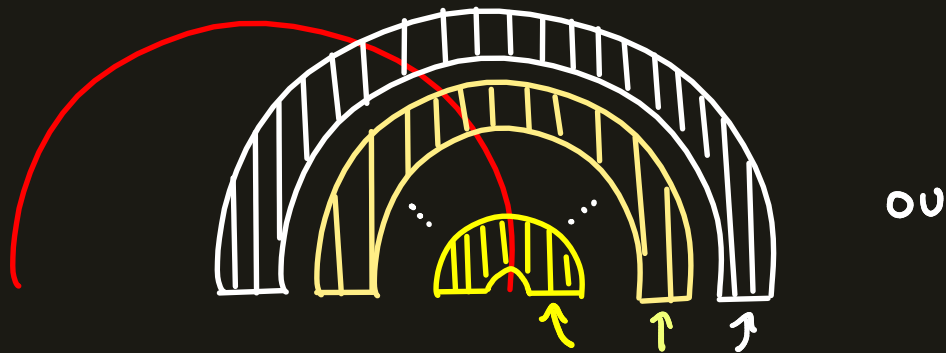
Preuve:

SEULEMENT UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes connexes à n cordes et une seule corde terminale

$$\parallel \\ (2n-3)!!$$

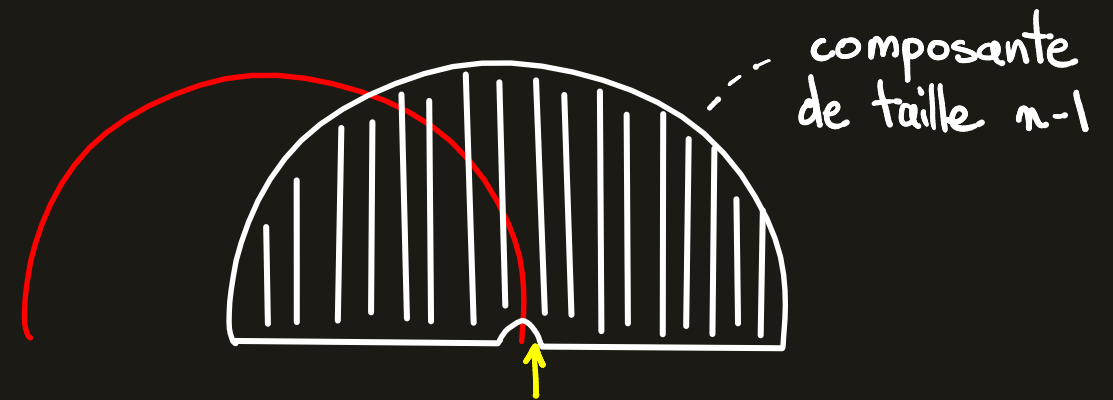
Preuve:



+ d'1 corde terminale

IMPOSSIBLE!

ou



$2n-3$ insertions possibles

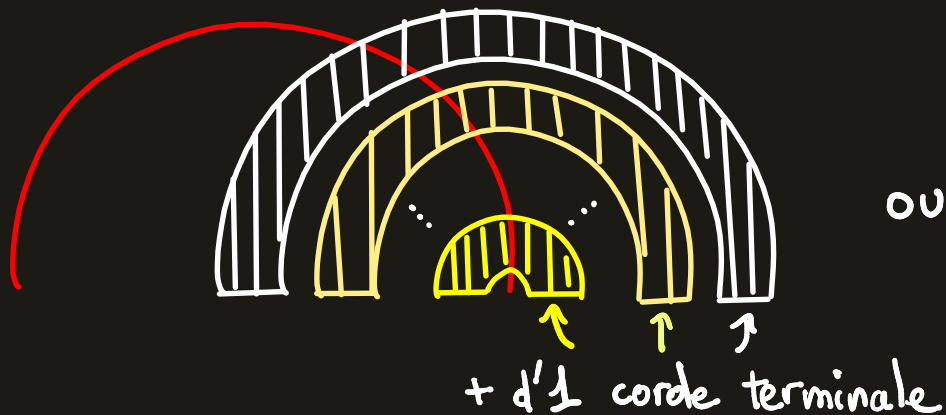
SEULEMENT UNE SEULE CORDE TERMINALE

nombre de diagrammes connexes à n cordes et une seule corde terminale

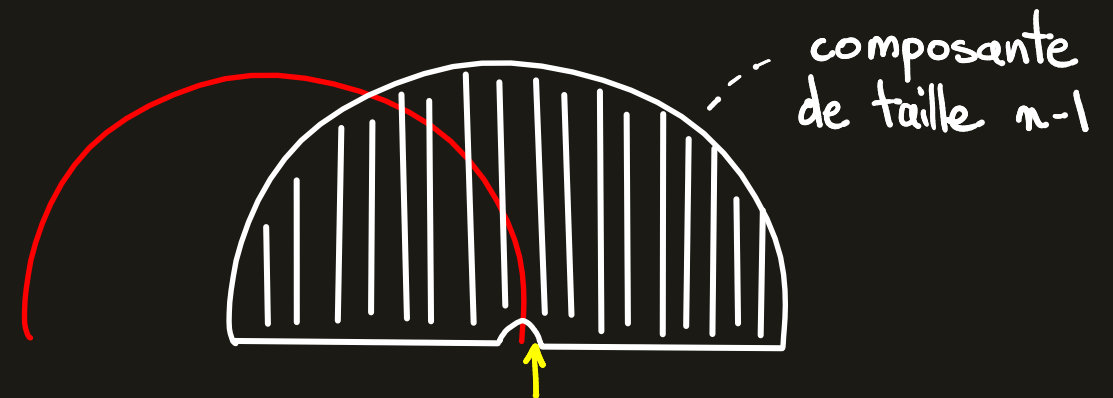
$$\parallel$$

$$(2n-3)!!$$

Preuve:



IMPOSSIBLE!



$2n-3$ insertions possibles

Corollaire:

$n^{\text{ième}}$ coefficient du développement log-dominant

$$= \frac{(2n-3)!!}{n!} f_0^n$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

→ Concerne les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - 1$

→ La bijection  =  $\oplus$  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion $\oplus$ techniques de combinatoire analytique.

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

→ Concerne les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$

→ La bijection  =  $\oplus$  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion $\oplus$ techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que $t_1 \geq |C| - l$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

→ Concerne les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$

→ La bijection  =  $\oplus$  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion $\oplus$ techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que $t_1 \geq |C| - l$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

Mais quid de $f_0^{|C|-k} f_{t_1-k} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}}$?

OÙ SEULES LES l DERNIÈRES CORDES SONT TERMINALES

→ Énumérons les diagrammes tels que toutes les cordes terminales sont parmi les l dernières.

→ La bijection  =  $\oplus$  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion $\oplus$ techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

seules les l dernières cordes sont terminales

OÙ SEULES LES l DERNIÈRES CORDES SONT TERMINALES

→ Énumérons les diagrammes tels que toutes les cordes terminales sont parmi les l dernières.

→ La bijection  =  $\oplus$  fonctionne.

→ Ingrédients: récursion $\oplus$ techniques de combinatoire analytique.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

nombre de diagrammes connexes à n cordes tels que seules les l dernières cordes sont terminales

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n!$$

$$\text{ici } f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \cdots f_{t_k-t_{k-1}} = f_0^{n-l+1} f_1^{l-1}$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

Ainsi les diagrammes tels que seules les l dernières cordes sont terminales sont dominants parmi les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

$$n^{\text{ième}} \text{ coefficient du } l^{\text{ième}} \text{ développement log-dominant} \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n! \times b_0^{n-l+1} \times b_1^{l-1}$$

$l^{\text{ième}}$ DÉVELOPPEMENT LOG-DOMINANT

Ainsi les diagrammes tels que *seules les l dernières cordes sont terminales* sont dominants parmi les diagrammes tels que $t_1 \geq |C| - l$.

Théorème: Pour $l \geq 0$,

$$n^{\text{ième}} \text{ coefficient du } l^{\text{ième}} \text{ développement log-dominant} \\ \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{l+1} l!} \times \frac{\ln(n)^l}{n^{\frac{3}{2}}} \times n! \times f_0^{n-l+1} \times f_1^{l-1}$$

Seuls f_0 et f_1 comptent !

CORDES TERMINALES POUR LA DISTRIBUTION UNIFORME



MAAIS...

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES



Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle!

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

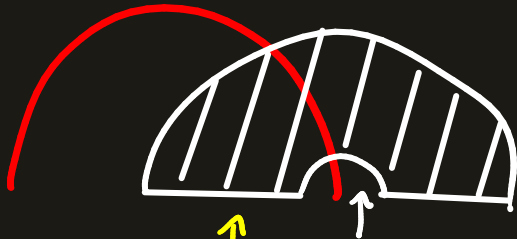
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 🙄

Idée: 😊



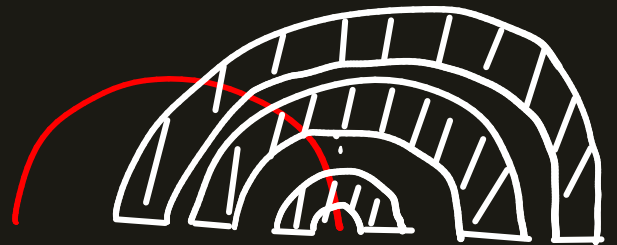
↑
grand nombre
de cordes

=



↑
proba ??

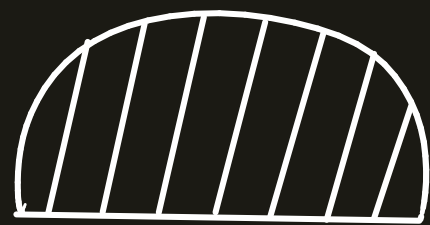
ou



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

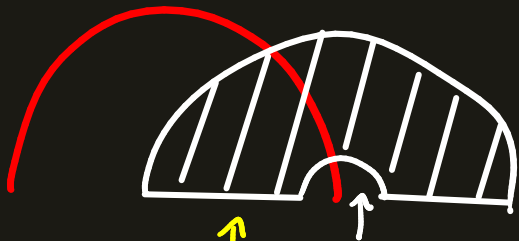
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

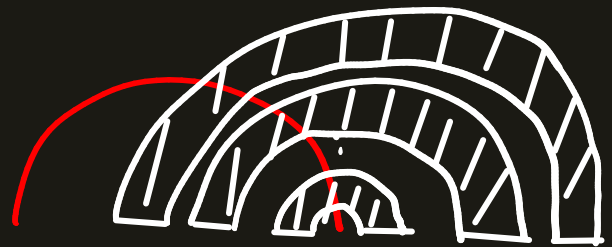


↑
grand nombre
de cordes

=



ou



$$\text{proba} = \frac{(2n-3) c_{n-1}}{c_n} \rightarrow 1$$

↑
proba $\rightarrow 0$

Enlever la corde racine ne déconnecte pas le diagramme presque sûrement.
Intéressant mais insuffisant!

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

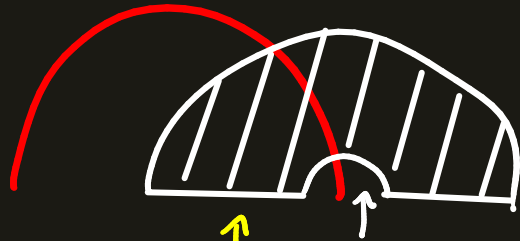
Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

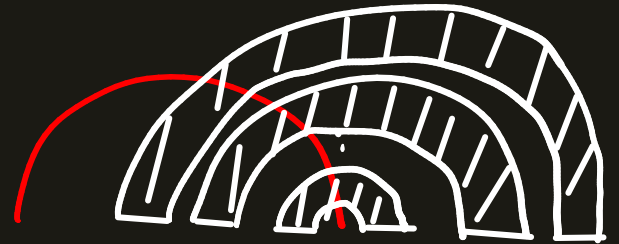


↑
grand nombre
de cordes

=



ou



$$\text{proba} = \frac{(2n-3) c_{n-1}}{c_n} \rightarrow 1$$

↑
proba $\rightarrow 0$

Enlever la corde racine ne déconnecte pas le diagramme presque sûrement.
Intéressant mais insuffisant! 😞

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idee: 😊

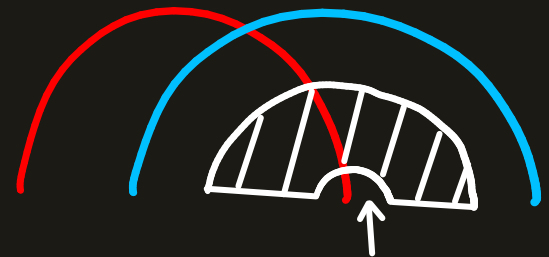


↑
grand nombre
de cordes

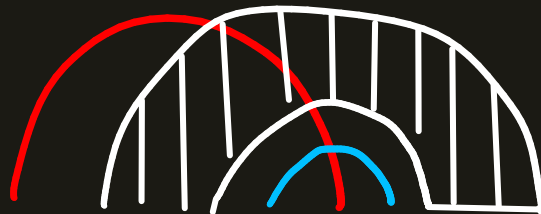
=



ou



ou



ou



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

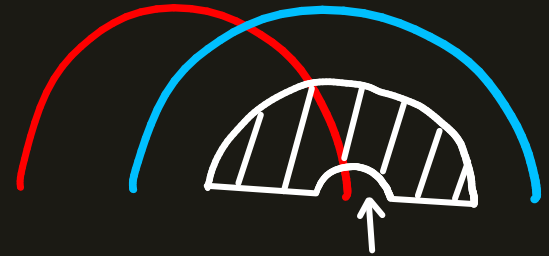


↑
grand nombre
de cordes

=



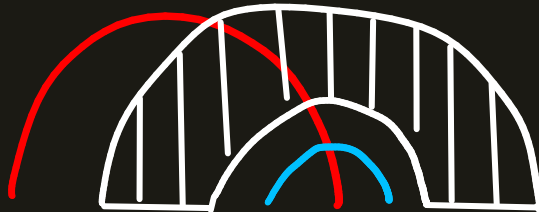
ou



$$\text{proba} = (2n-3) \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou



ou



$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idée: 😊

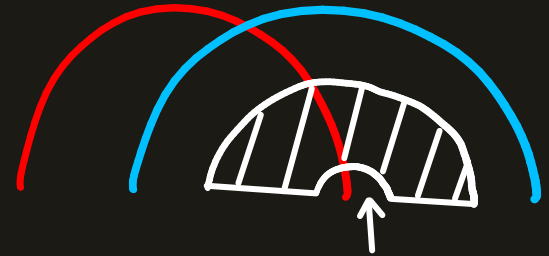


↑
grand nombre
de cordes

=



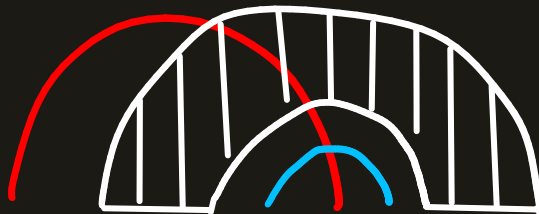
ou



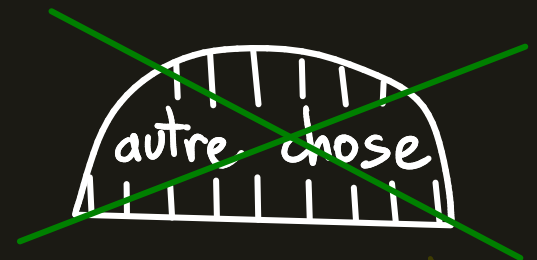
$$\text{proba} = (2n-3) \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

ou



ou



$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Question difficile: pas de jolies expressions pour la série génératrice exponentielle! 😞

Idee: 😊

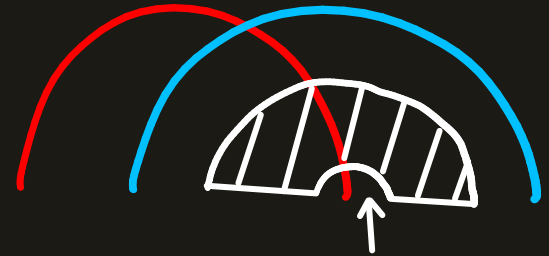


↑
grand nombre
de cordes

=



ou



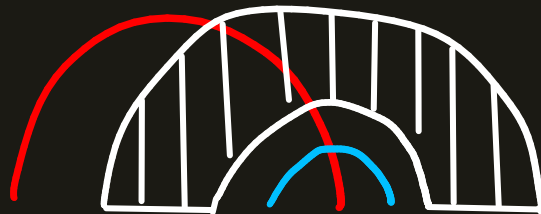
$$\text{proba} = (2n-3) \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

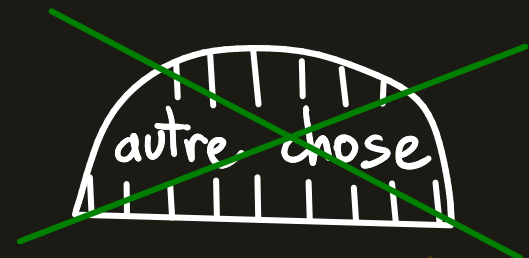
Ça va marcher!



ou



ou



$$\text{proba} = (2n-5) \frac{c_{n-2}}{c_n} \sim \frac{1}{2n}$$

$$\text{proba} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Définissons X_n comme la variable aléatoire telle que

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{avec proba } 1 - \frac{1}{n} \\ X_{n-1} + 1 & \text{avec proba } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Idée n°1

Quelles que soient
les conditions initiales,

$X_n \rightarrow$ loi gaussienne

Idée n°2

Nombre de
cordes terminales

' $\sim$ ' X_n

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES

Théorème Pour la distribution uniforme,

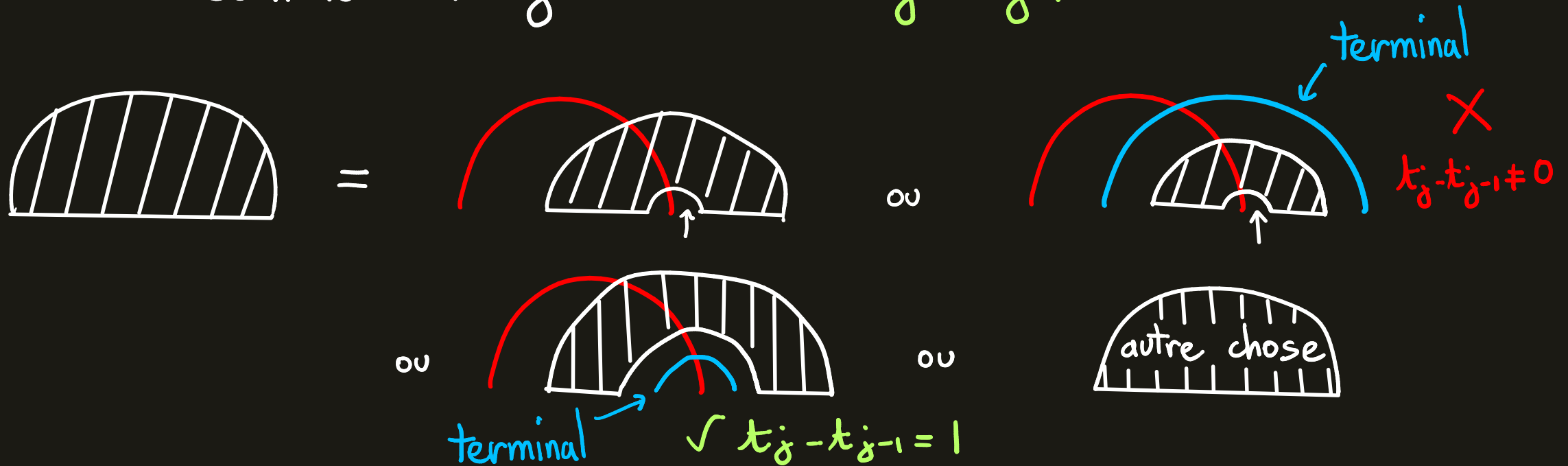
Nombre de cordes terminales	$\xrightarrow{\text{loi}}$	Loi gaussienne moyenne $\sim \ln(n)$ variance $\sim \ln(n)$
--------------------------------	----------------------------	---

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?

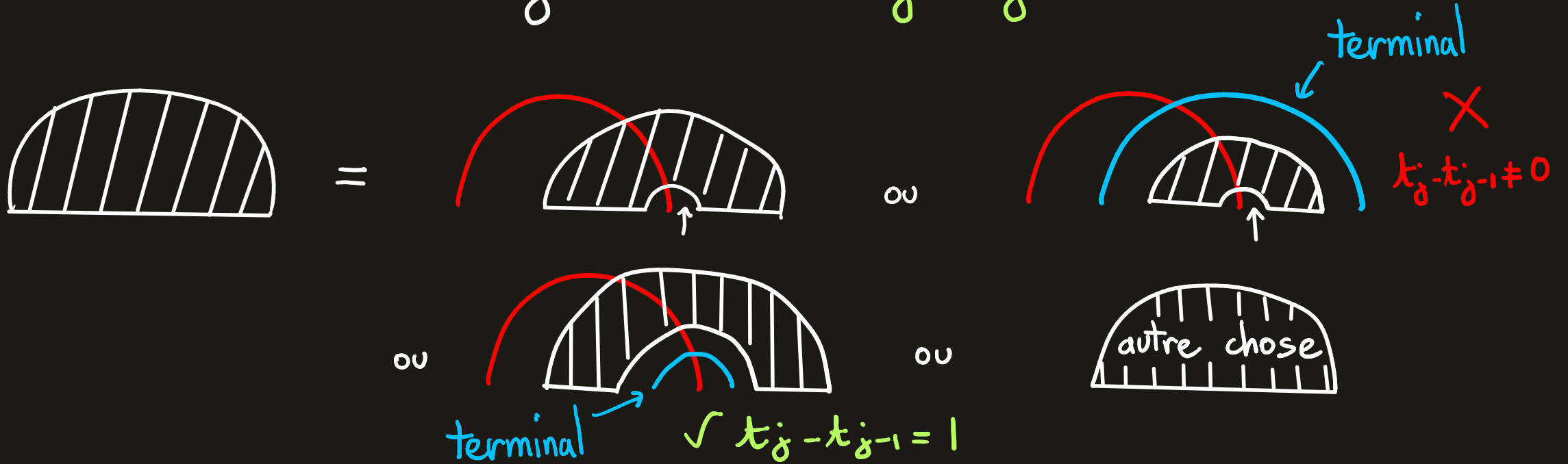
NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?



NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSECUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?



Théorème Pour la distribution uniforme,
Loi gaussienne
Nombre de cordes terminales consécutives $\xrightarrow{\text{loi}}$ moyenne $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$
variance $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$

NOMBRE MOYEN DE CORDES TERMINALES CONSÉCUTIVES

Si les cordes terminales sont en position $t_1 < t_2 < \dots < t_k$,
combien de j satisfont $t_j - t_{j-1} = 1$?

En moyenne, $f_0^{|C|-k} f_{t_1-i} f_{t_2-t_1} f_{t_3-t_2} \dots f_{t_k-t_{k-1}} \sim f_0^{n-\ln n} f_{t_1-i} f_1^{\frac{\ln n}{2}} \dots$

→ confirme l'importance de f_0 et f_1

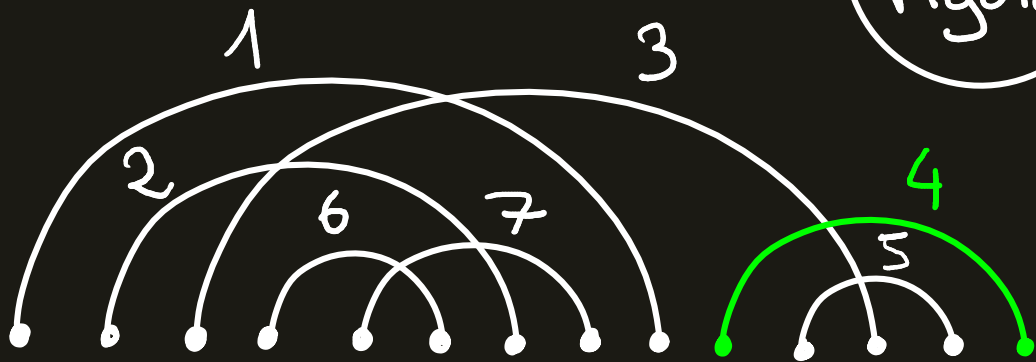
Théorème Pour la distribution uniforme,
Nombre de cordes terminales consécutives $\xrightarrow{\text{loi}}$ Loi gaussienne
moyenne $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$
variance $\sim \frac{1}{2} \ln(n)$

POSITION DE LA PREMIÈRE CORDE TERMINALE

t_1 = variable aléatoire qui retourne la position de la 1^{ère} corde terminale

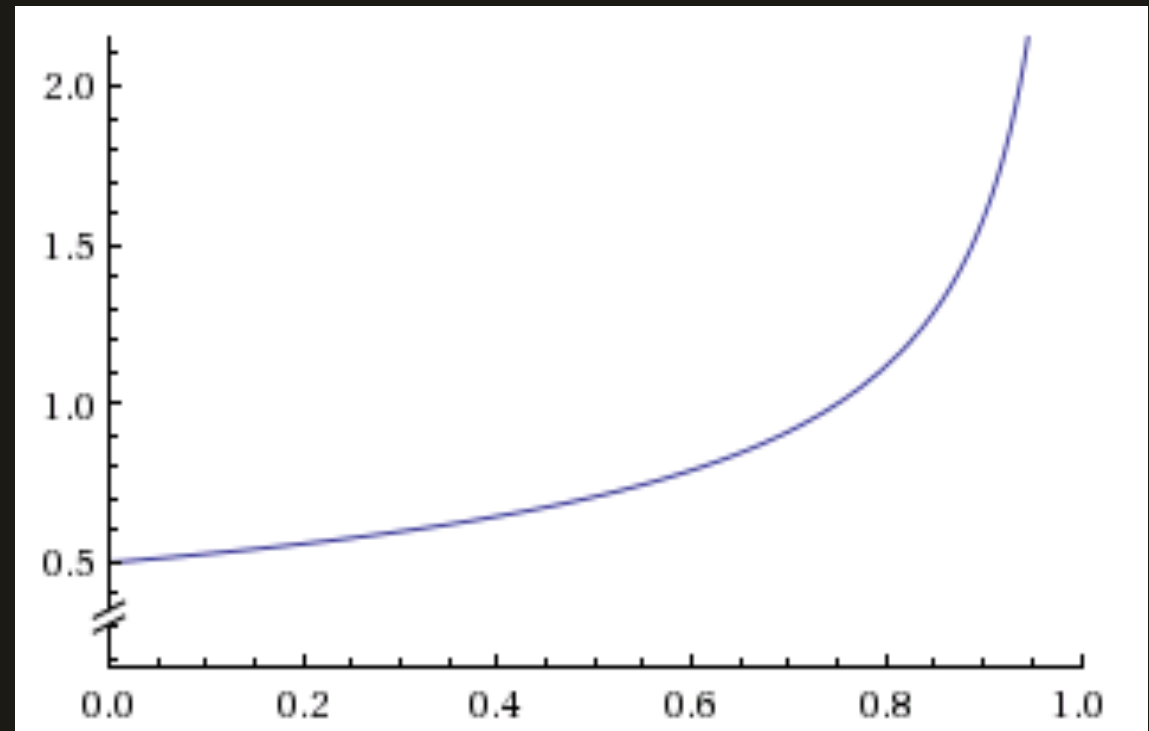
Première corde terminale
= corde à l'extrémité la plus à droite

Fait rigolo



Théorème: $\mathbb{E}(t_1) \sim \frac{2}{3}n$

$\frac{t_1}{n} \xrightarrow{\text{loi}}$ loi de densité $\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} \mathbb{1}_{\{0 < \delta < 1\}}$



CONCLUSION

- Retrouve les résultats de [Krüger-Kreimer]
- ⊕ automaticité de la méthode
 - ⊕ comportement asymptotique

→ Loi limite de $t_j - t_{j-1}$?

Conjecture:

partie discrète

$$\mathbb{P}(t_j - t_{j-1} = 1) \rightarrow \frac{1}{2}$$

partie continue

moyenne

$$\sim \frac{2}{3} \frac{n}{\ln n}$$

→ Extension aux résultats de [Hahn-Yeats] ← travail en cours



THANK
YOU!