HYPERDETERMINANTS, HYPERPFAFFIENS ET CARRÉS LATINS

A. Aboud, J-g. Luque
LITIS, Rouen

22 septembre 2015, LIX

1 Compter les carrés latins

Un carré latin est une matrice carrée $n \times n$ dont les lignes et les colonnes sont des permutations $\mathfrak{S}_n$.

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

sont deux des 12 carrés latins de taille 3.

Pour simplifier l'énumération, on peut remarquer que l'on peut obtenir 6 carrés latins différents à partir d'un seul en permutant les colonnes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \dots$$

De la même façon, la première ligne étant fixée, on peut obtenir 2 carrés latins différents en permutant les deux autres lignes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pour compter les carrés latins de taille n, il suffit donc de compter les carrés latins de taille n dont la première ligne et la première colonne sont fixées (à l'identité par exemple) et de multiplier le tout par $n!(n-1)!$. L'ensemble des carrés latins de taille n dont la première ligne et la première colonne sont fixées se note $NLS(n)$ (pour normalized latin squares) dans l'article de Zappa [7].

Il n'y a pas de formule permettant de calculer le cardinal de $NSL(n)$, seules les premières valeurs sont connues de Sloane

$$\begin{gathered}1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 56,\ 9408,\ 16942080(1948),\ 535281401856(1967),\\ 377597570964258816(1975), 7580721483160132811489280(1995),\\ 5363937773277371298119673540771840(2005)\end{gathered}$$

Pour chaque carré latin, on peut calculer la somme des inversions SI de ses lignes et de ses colonnes.

$$SI\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0 + 2 + 2(lignes) + 0 + 2 + 2(col)$$

On dira qu'un carré est pair si son nombre d'inversion est pair et impair si son nombre d'inversion est impair.

Zappa [7] note $ELS(n)$ les carrés latins pairs de taille n et $OLS(n)$ les carrés latins impairs de taille n. Lorsque n est impair, il y a toujours autant de carrés latins pairs que de carrés latins impairs (en effet, dans ce cas précis, si on permute deux lignes, on change le signe du carré). Ce n'est pas le cas pour les carrés de taille paire: les premiers carrés impaires de taille paire apparaissent pour $n = 6$.

La conjecture d'Alon-Tarsi concerne la différence $\sharp ELS(n) - \sharp OLS(n)$.

Conjecture 1.1 *Si n est pair alors $\sharp ELS(n) - \sharp Ols(n) \neq 0$.*

Nous verrons un peu plus loin, pourquoi il y a plus (au sens large) de carré pairs que de carré impairs.

Zappa [7] prolonge la définition de la constante d'Alon-Tarsi aux carrés de taille paire en introduisant les carrés latins à diagonale fixée : DLS, $DELS$ et $DOLS$ (pour respectivement, diagonale fixée, diagonale fixée pair, diagonale fixée impair). Un carré latin avec diagonale fixée est un carré latin dont tous les éléments diagonaux valent 1. Zappa définit la constante d'Alon-Tarsi pour tout n comme étant la différence entre les $DELS$ et les $DOLS$ divisée par $(n-1)!$

$$AT(n) := \frac{\sharp DELS(n) - \sharp DOLS(n)}{(n-1)!}.$$

Par exemple: pour $n = 3$, il y a seulement 2 carrés latins à diagonale fixée

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces deux carrés sont impairs donc $AT(3) = -1$. Voici les premières valeurs de $AT(n)$ telles qu'elles apparaissent sur Sloane (à partir de $n = 2$:

$$1, -1, 4, -24, 2304, 368640, 6210846720.$$

Autrement dit, on peut définir la constante d'Alon-Tarsi comme une somme alternée

$$AT(n) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{c \in DLS(n} (-1)^{SI(c)},$$

2 Lien avec les hyperdéterminants et les hyperpermanents

Considéront un tenseur $(M_{i_1,\dots,i_k})_{1\leq i_1,\dots,i_k}$. L'hyperdeterminant de M est le polynôme

$$\mathrm{Det} M = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_k\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma_1)\dots\epsilon(\sigma_k)\prod_{i=1}^{n}M_{\sigma_1(i)\dots\sigma_k(i)},$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne le signe de la permutation σ. De façon triviale, lorsque k est impair alors $\mathrm{Det}=0$.
Le plus petit exemple non trivial est celui du tenseur $2\times 2\times 2\times 2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det} M &= M_{1111}M_{2222}\\ &\quad -M_{1112}M_{2221}-M_{1121}M_{2212}-M_{1211}M_{2122}\\ &\quad +M_{1122}M_{2211}+M_{1212}M_{2121}+M_{1221}M_{2112}\\ &\quad -M_{1222}M_{2111}.\end{aligned}$$

Considéront un tenseur antisymétrique $2k^{\otimes 2k}$. Alors son hyperdéterminant s'écrit

$$\mathrm{Det} M = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{2k} \in \mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\sigma_1)\ldots\epsilon(\sigma_k) \prod_{i=1}^{2k} M_{\sigma_1(i)\ldots\sigma_{2k}(i)}.$$

Or $M_{\sigma_1(i)\ldots\sigma_{2k}(i)} \neq 0$ uniquement si $\sigma_1(i)\ldots\sigma_{2k}(i)$ est une permutation et dans ce cas

$$M_{\sigma_1(i)\ldots\sigma_{2k}(i)} = \epsilon(\sigma_1(i)\ldots\sigma_{2k}(i)) M_{1\ldots 2k}.$$

Donc un $2k$-uplet $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{2k})$, a une contribution non nulle à la somme si et seulement si

$$c = \begin{bmatrix} \sigma_1(1) & \ldots & \sigma_1(2k) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{2k}(1) & \ldots & \sigma_{2k}(2k) \end{bmatrix}$$

est un carré latin. De plus,

$$\epsilon(\sigma_1)\ldots\epsilon(\sigma_k) \prod_{i=1}^{2k} M_{\sigma_1(i)\ldots\sigma_{2k}(i)} = (-1)^{SI(c)} M_{1\ldots 2k}.$$

Ce qui implique que l'hyperdeterminant de M est relié à la constante d'Alon Tarsi par:

$$\mathrm{Det} M = (2k-1)! AT(2k).$$

Le lien entre hyperdéterminant et constante d'Alon-Tarsi a été établi tout d'abord par Gheradelli [6] et a été exploité par Zappa [7] pour montrer que $AT(2n) \geq 0$. On peut jouer au même jeux avec les tenseurs symétriques. Pour cela, on définit l'hyperpermanent par

$$\mathrm{Per} M = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_k \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} M_{\sigma_1(i)\dots\sigma_k(i)},$$

Dans ce cas, si M est un tenseur symétrique $k^{\otimes k}$, on a

$$\mathrm{Per} M = \frac{1}{k!} \sharp LS(k) = (k-1)! \sharp NLS(n).$$

3 Hyperpfaffiens, Hyperhaffiens...

Lorsque M est un tenseur de dimension $mn^{\otimes mk}$, on peut définir les polynômes suivant qui généralisent les pfaffiens et les haffniens:

$$\mathrm{Pf}^m M = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1 \ldots \sigma_k \in \mathfrak{S}_{mn}} \epsilon(\sigma_1) \ldots \epsilon(\sigma_k) \prod_{i=1}^{n} M_{\sigma_1((i-1)m+1)\ldots\sigma_1(im)\ldots\sigma_k((i-1)m+1)\ldots\sigma_k(im)},$$

$$\mathrm{Hf}^m M = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma_1 \ldots \sigma_k \in \mathfrak{S}_{mn}} \prod_{i=1}^{n} M_{\sigma_1((i-1)m+1)\ldots\sigma_1(im)\ldots\sigma_k((i-1)m+1)\ldots\sigma_k(im)},$$

où la chacune des sommes porte sur les k-uplets de permutations $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ ayant les conditions de croissances $\sigma_j((i-1)m+1) < \cdots < \sigma_j(im)$ pour tout $1 \leq j \leq k$ et $1 \leq i \leq n$.

Par exemple, si on considère un tenseur M de dimension $4 \times 4 \times 4 \times 4$, on a

$$\mathrm{Pf}^1 M = \mathrm{Det} M,$$

$$\mathrm{Pf}^2 M = M_{1212}M_{3434} - M_{1213}M_{3424} + \cdots + M_{1423}M_{2314} + \ldots,$$

$$\mathrm{Pf}^4 M = M_{1234}.$$

On peut donner une définition alternative à l'hyperpfaffien en utilisant l'algèbre extérieure dotée de variables (anticommutatives) $\eta_1, \ldots, \eta_{nm}$ (on notera le produit par . plutôt que par $\wedge$ pour simplifier les notations). Si on considère le polynôme

$$\Omega_{m,k} := \sum_{i_1^1 < \cdots < i_m^1, \ldots i_1^k < \cdots < i_m^k,} M_{i_1^1 \ldots i_m^1 \ldots i_1^k \ldots i_m^k} \eta_{i_1^1} \ldots \eta_{i_m^1} \otimes \cdots \otimes \eta_{i_1^k} \ldots \eta_{i_m^k},$$

on a après réarrangement

$$\Omega_{m,k}^n := \frac{1}{n!} \mathrm{Pf}^m(M)(\eta_1 \ldots \eta_{nm})^{\otimes k}.$$

De cette écriture, on peut déduire des formules de développement de

Laplace

$$\mathrm{Pf}^m(M) = \frac{1}{n} \sum_{I_1=i_1^1<\cdots<i_m^1,\ldots,I_k=i_1^k<\cdots<i_m^k} \pm M_{i_1^1\ldots i_m^1\ldots i_1^k\ldots i_m^k} \mathrm{Pf}^m\left(M \begin{bmatrix} \{1,\ldots,mn\}\setminus I_1 \\ \vdots \\ \{1,\ldots,mn\}\setminus I_1 \\ \vdots \\ \{1,\ldots,mn\}\setminus I_k \\ \vdots \\ \{1,\ldots,mn\}\setminus I_k. \end{bmatrix}\right)$$

où le signe $\pm$ est égal à $(-1)^{\sum_{p,q}(i_p^q-p+1)}$ et $M\begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_{km} \end{bmatrix}$ désigne le tenseur obtenu en prenant les sous ensembles de variables $J_1,\ldots,J_{km}$ comme indice. Ces identités généralisent les identitées de "Laplace généralisées" introduites par Gegenbauer [5] ainsi que celle de Barvinok [2].

On peut aussi introduire des formules de composition dont le prototype est le suivant

On démare par l'identité suivante où $n = 2m$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\eta_i \otimes \eta_j\right)^n = n!\det M(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\otimes 2}$$

Or, on a

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\eta_i \otimes \eta_j\right)^2 = 2\sum_{\substack{i_1<i_2\\ j_1<j_2}} \begin{vmatrix} M_{i_1j_1} & M_{i_2j_1} \\ M_{i_1j_2} & M_{i_2j_2} \end{vmatrix} \eta_{i_1}\eta_{i_2} \otimes \eta_{j_1}\eta_{j_2}.$$

Donc

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}\eta_i \otimes \eta_j\right)^{2m} = 2^m m!\mathrm{Pf}^2\left(\begin{vmatrix} M_{i_1j_1} & M_{i_2j_1} \\ M_{i_1j_2} & M_{i_2j_2} \end{vmatrix}\right)_{1\le i_1,i_2,j_1,j_2\le n} (\eta_1 \ldots \eta_n)^{\otimes 2}.$$

D'où

$$\mathrm{Pf}^2\left(\begin{vmatrix} M_{i_1j_1} & M_{i_2j_1} \\ M_{i_1j_2} & M_{i_2j_2} \end{vmatrix}\right)_{1\le i_1,i_2,j_1,j_2\le n} = \frac{n!}{2^m m!}\det M.$$

On peut imaginer sur le même modèle d'autres identités comme

$$\mathrm{Det}\,(M_{i_1\ldots i_6})_{1\leq i_1,\ldots,i_6\leq 2n} = (*)\mathrm{Pf}^2\left(\mathrm{Det}\left(M\begin{bmatrix} i_1, i_2 \\ \vdots \\ i_{11}, i_{12}\end{bmatrix}\right)\right)_{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_{12}\leq 2n}$$

ou encore

$$\mathrm{Det}\,(M_{i_1\ldots i_6})_{1\leq i_1,\ldots,i_6\leq 3n} = (*)\mathrm{Pf}^3\left(\mathrm{Det}\left(M\begin{bmatrix} i_1, i_2, i_3 \\ \vdots \\ i_{16}, i_{17}, i_{18}\end{bmatrix}\right)\right)_{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_{18}\leq 2n}$$

ainsi que pleins d'autres faisant intervenir plusieurs types d'hyperpfaffiens.

On peut montrer l'égalité

$$\mathrm{Pf}^{(pm)}\left(\mathrm{Pf}^{(m)}\left(M\begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} i_1,\ldots,i_{pm} \\ \vdots \\ i_1,\ldots,i_{pm}\end{matrix}\right\}\times m \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} i_{pm(k-1)+1},\ldots,i_{pmk} \\ \vdots \\ i_{pm(k-1)+1},\ldots,i_{pmk}\end{matrix}\right\}\times m \end{bmatrix}\right)\right)_{1\leq i_1,\ldots,i_{pmk}\leq spm} =$$

$$\frac{\binom{sp}{p,\ldots,p}}{s!}\mathrm{Pf}^{(m)}\left(M_{i_1\ldots i_{mk}}\right)_{1\leq i_1,\ldots,i_{mk}\leq spm}$$

en utilisant les variables grassmaniennes comme précédemment... à faire...

Si on considère un tenseur alterné $2mk^{\otimes 2mk}$, les hyperpfaffiens comptent aussi des sommes alternées sur des objets qui généralisent les carrés latins.

Par exemple, si M est un tenseur antisymétrique $6^{\otimes 6}$:

$$\mathrm{Pf}^3 M = \sum_c \epsilon(c)$$

où c est un objet de la forme

$$c = \begin{bmatrix} \sigma_1(1) & \sigma_1(2) & \sigma_1(3) & \sigma_2(1) & \sigma_2(2) & \sigma_2(3) \\ \sigma_1(4) & \sigma_1(5) & \sigma_1(6) & \sigma_2(5) & \sigma_2(6) & \sigma_2(7) \end{bmatrix}$$

où chaque ligne est une permutation et le signe $\epsilon(c)$ est le produit des signes de σ_1 et σ_2 et de celui des lignes.
Autre exemple avec le même tenseur

$$\mathrm{Pf}^3 M = \sum_c \epsilon(c)$$

où

$$c = \begin{bmatrix} \sigma_1(1) & \sigma_1(2) & \sigma_2(1) & \sigma_2(2) & \sigma_3(1) & \sigma_3(2) \\ \sigma_1(3) & \sigma_1(4) & \sigma_2(3) & \sigma_2(4) & \sigma_3(3) & \sigma_3(4) \\ \sigma_1(5) & \sigma_1(6) & \sigma_2(5) & \sigma_2(6) & \sigma_3(5) & \sigma_3(6) \end{bmatrix},$$

où chaque ligne est une permutation et le signe est le produit des signes des σ_i avec celui de chaque ligne.

Voici la table des Pf^p pour des tenseurs antisymétriques $2k^{\otimes 2k}$.

$p \setminus 2k$	2	4	6	8	10	12
1	1	4	2304	6210846720	?	?
2	1	3	90	204120	?	?
3	NA	NA	10	NA	NA	?
4	NA	1	NA	35	NA	519750
5	NA	NA	NA	NA	126	NA
6	NA	NA	1	NA	NA	462

Montrez que $\mathrm{Pf}^k M = \binom{2k-1}{k}$ *si* M *est le tenseur antisymétrique* $2k^{\otimes 2k}$. *(il suffit de décrire les rectangles obtenus)*

Tout ce qui a été écrit dans cette section peut se reécrire en faisant intervenir des variables commutatives ξ_i vérifiant $\xi_i^2 = 0$. On trouve alors des identités faisant intervenir des Hyperhaffniens.

Reprendre le passage et prouver les identités analogues pour les hyperhaffniens.

Montrer les résultats de l'article de Drisko [4] en utilisant uniquement des arguments hyperdéterminentaux.

Est-ce que l'on peut avoir un raisonnement similaire avec les autres sommes alternées apparues dans la section précédente?

References

[1] N. Alon, M. Tarsi, *Coloring and orientations of graphs*, Combinatoria 12 (1992), 125-143.

[2] A.I. Barvinok, *New algorithm for linéar k-matroid intersection and matroid k-parity problems*, Mathematical Programming, 69 (1995), 449-470.

[3] A.A. Drisko, *On the number of even and odd latin squares of order* $p+1$

[4] A.A. Drisko, *Proof of the Alon-Tarsi Conjecture for* $n = 2^r p$.

[5] L. Gegenbauer *Über Determinanten hheren Ranges*, Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Vienne,43, 17-32, 1882.

[6] F. Gherardelli, *Osservarioni sugli iperdeterminanti*, Istit. Lombardo Acad. Sci. Let. Rend., A 126 (1993), 107-113.

[7] P. Zappa, *The Cayley determinant of the determinant tensor and the Alon-Tarsi conjecture*, Adv. Appl. Math., 19 (1997), 31-44.

Merci !