Algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées

Bérénice Delcroix-Oger

Institut de Mathématiques de Toulouse

Journées du GT Combalg, 21-22 Septembre 2015

Sommaire

Sommaire

Qu'est-ce qu'une partition ?

Définition

Une partition *d'un ensemble I est un ensemble de parties non vides de I deux à deux disjointes et qui recouvrent I.*

Ensemble des partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\{1, 2,3, 4\}$$
$$\{1\}\{2, 3, 4\}, \{2\}\{1, 3, 4\},\{3\}\{1, 2, 4\}, \{4\}\{1, 2, 3\}$$
$$\{1, 2\}\{3, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \{1, 4\}\{2, 3\}$$
$$\{1, 2\}\{3\}\{4\}, \{1, 3\}\{2\}\{4\}, \{1, 4\}\{2\}\{3\},$$
$$\{2, 3\}\{1\}\{4\}, \{2, 4\}\{1\}\{3\}, \{3, 4\}\{1\}\{2\}$$
$$\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$$

Un ordre partiel sur les partitions

Soit n, un entier naturel,

Définition

Le poset des partitions sur n éléments Π_n est le poset dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des partitions de n muni de l'ordre partiel suivant : $p_1 \geq p_2 \iff$ toute part de p_1 est union de parts de p_2

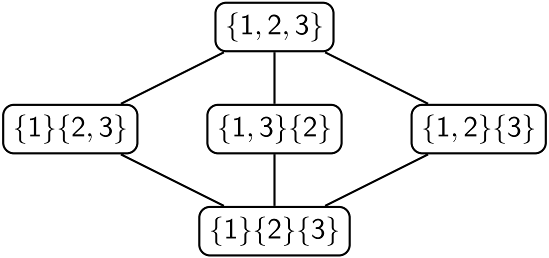
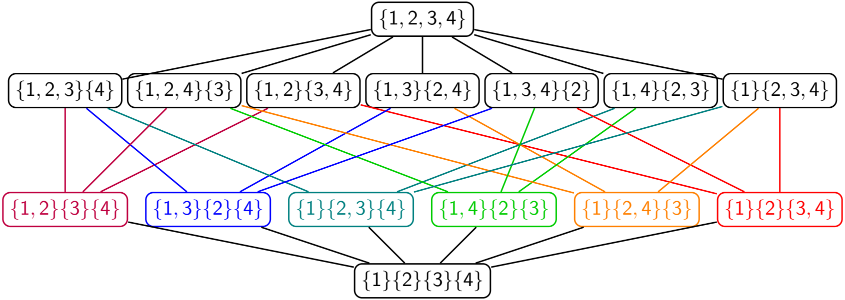


Figure: Le poset Π_3

Poset des partitions Π_4



Construction de l'algèbre de Hopf d'incidence associée à une famille d'intervalles [Schmitt, 94]

Considérons une famille $\mathcal{P}$ d'intervalles (posets bornés)

Construction de l'algèbre de Hopf d'incidence associée à une famille d'intervalles [Schmitt, 94]

Considérons une famille $\mathcal{P}$ d'intervalles (posets bornés)

- close par intervalles ($\forall P \in \mathcal{P}, x \leq y \in P, [x, y] \in \mathcal{P}$)

Construction de l'algèbre de Hopf d'incidence associée à une famille d'intervalles [Schmitt, 94]

Considérons une famille $\mathcal{P}$ d'intervalles (posets bornés)

- close par intervalles ($\forall P \in \mathcal{P}, x \leq y \in P, [x, y] \in \mathcal{P}$)
- close par produit direct

Construction de l'algèbre de Hopf d'incidence associée à une famille d'intervalles [Schmitt, 94]

Considérons une famille $\mathcal{P}$ d'intervalles (posets bornés)

- close par intervalles ($\forall P \in \mathcal{P}, x \leq y \in P, [x, y] \in \mathcal{P}$)
- close par produit direct

$$\Delta[P] = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

Construction de l'algèbre de Hopf d'incidence associée à une famille d'intervalles [Schmitt, 94]

Considérons une famille $\mathcal{P}$ d'intervalles (posets bornés)

- close par intervalles ($\forall P \in \mathcal{P}, x \leq y \in P, [x, y] \in \mathcal{P}$)
- close par produit direct

Alors, le $\mathbb{Q}$-ev $C(\mathcal{P})$ muni du produit direct de posets(, d'un antipode) et du coproduit suivant :

$$\Delta[P] = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

est une algèbre de Hopf appelée *algèbre de Hopf d'incidence*.

Exemple (cf. [Schmitt,94])

$\mathcal{P}$, la famille des produits directs de posets de partitions vérifie les hypothèses requises. Le coproduit est alors donné par :

$$\Delta\left(\frac{\Pi_n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n j_i=k, \sum_{i=1}^n ij_i=n}} \binom{k}{j_1,\ldots,j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi_i}{i!}\right)^{j_i} \otimes \frac{\Pi_k}{k!}. \quad (1)$$

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions

Proposition

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions est isomorphe à la structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a_k)_{k\geq 1}$ *donnée par la composition de séries formelles de la forme suivante :*

$$F = x + \sum_{k\geq 2} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée *est une partition sur un ensemble de "pointable" (•) et un ensemble de "non pointable" (•) vérifiant :*

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" (•) et un ensemble de "non pointable" (•) vérifiant :

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\}$ $\rightarrow$ ■ *(pointée en un pointable)*

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\}$ $\rightarrow$ ■ *(pointée en un pointable)* ou ■ *(non pointée)*

$\{\bullet\ \bullet\}$ $\rightarrow$ ■ *(non pointée)*

Partitions semi-pointées

$1, 2, 3$	$1, 2, 3, 4$	$1, 2$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\{\dot{1}, 2, 3\}$	$\{\dot{1}, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2\}$
$\{1, \dot{2}, 3\}$	$\{1, \dot{2}, 3, 4\}$	$\{1\}\ \{2\}$
$\{1, 2, \dot{3}\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	
$\{\dot{1}, 2\}\{\dot{3}\}$	$\{1, \dot{2}\}\{3, 4\}$	
$\{\dot{1}\}\{\dot{2}, 3\}$	$\{\dot{2}, 4\}\{\dot{1}, 3\}$	
$\{\dot{1}\}\{\dot{2}\}\{\dot{3}\}$	$\{2, 4\}\ \{1, 3\}$	
$\vdots$	$\vdots$	

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \geq p_2 \Longleftrightarrow \textit{toute part de } p_1 \textit{ est union de parts de } p_2$$

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \geq p_2 \iff \textit{toute part de } p_1 \textit{ est union de parts de } p_2$$

Et

Un ordre sur les partitions semi-pointées

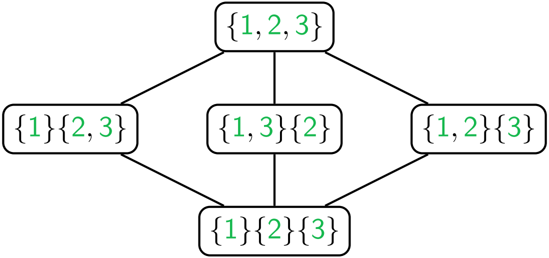
Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

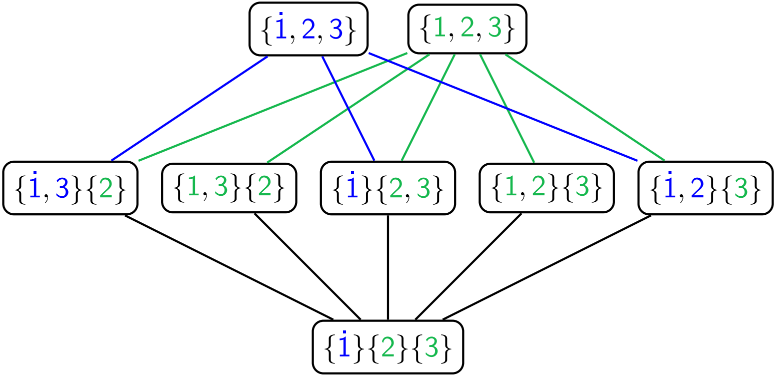
$$p_1 \geq p_2 \iff \textit{toute part de } p_1 \textit{ est union de parts de } p_2$$

Et une part de p_1 est pointée en un élément x si et seulement si l'élément x était pointé dans une part de p_2.

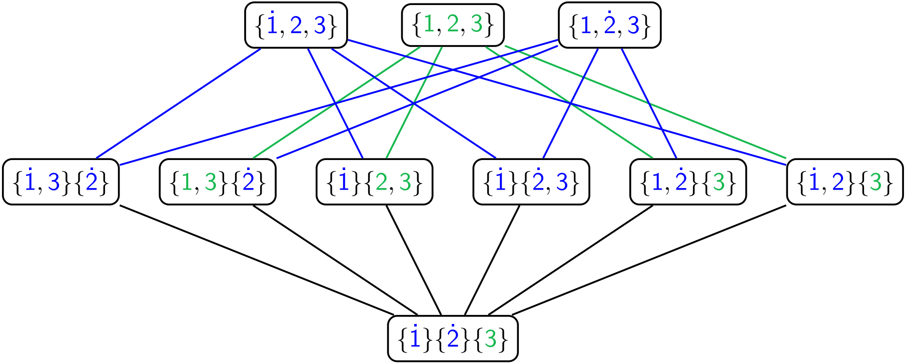
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_3 = \Pi_{3,0}$



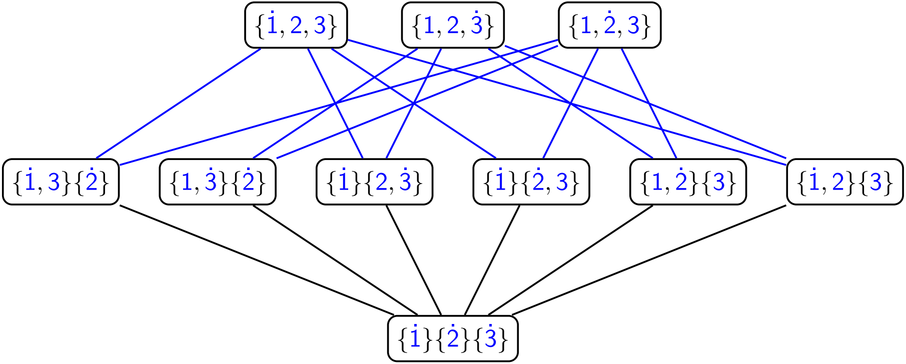
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,1}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,2}$



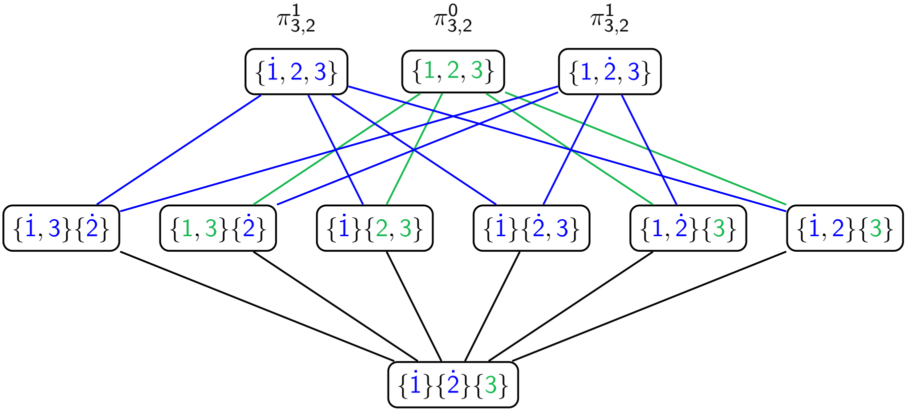
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,3}$



L'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées

Considérons la famille $\mathcal{P}$ des produits directs d'intervalles maximaux dans les posets de partitions pointées, $\pi^1_{n,p}$ et $\pi^0_{n,p}$.

Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,2}$



L'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées

Considérons la famille $\mathcal{P}$ des produits directs d'intervalles maximaux dans les posets de partitions pointées, $\pi^1_{n,p}$ et $\pi^0_{n,p}$.

Proposition

Soit $p \in \pi^o_{n,p}$.
$[m^o_{n,p}; p] \sim \pi^o_{j,l}$, où j (resp. l) est le nombre de parts (resp. de parts pointées) de p.
$[p; \pi_{n,p}] \sim \prod \pi^1_{n_j,p_j} \times \prod \pi^0_{n_j,p_j}$ avec un facteur pour chaque part de p à n_j éléments et p_j éléments pointés (et le pointage correspondant).

$\rightarrow$ Famille héréditaire (close par intervalles et par produit direct)

Calcul du coproduit

$$\Delta[P] = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

$$\Delta(\pi^o_{n,p}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_j \geq 1, \\ \sum_{i=1}^j n_i = n}} \sum_{\substack{p_1,\ldots,p_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^j p_i = p}} \sum_{\substack{o_1,\ldots,o_j \in \{0;1\} \\ o_i \leq p_i, \\ o \leq \sum_{i=1}^j o_i \leq j-1+o}} c^{\mathbf{o}}_{\mathbf{n},\mathbf{p}} \prod_{i=1}^{j} \pi^{o_i}_{n_i,p_i} \otimes \pi^{o}_{j,\sum_{i=1}^j o_i}$$

où $c^{\mathbf{o}}_{\mathbf{n},\mathbf{p}}$ est le nombre de partitions à j parts, de taille $n_1, \ldots, n_j$, avec $p_1, \ldots, p_j$ éléments dans chaque part pointée de $\pi_{n,p}$ and dont la $i$ème part pointée si $o_i = 1$, non pointée sinon.

Théorème (B. D.-O.)

Le coproduit est donné par :

$$\Delta\left(\frac{\pi^{o}_{k+l,k}}{l!(k-o)!}\right) = \sum_{p+q\geq 1}\sum_{(l_i,k_i)}\prod_{i=1}^{p}\frac{\pi^{1}_{l_i+k_i,k_i}}{l_i!(k_i-1)!}\prod_{i=p+1}^{p+q}\frac{\pi^{0}_{l_i+k_i,k_i}}{l_i!k_i!}\otimes\frac{\pi^{o}_{p+q,p}}{q!(p-o)!}, \qquad (2)$$

où la deuxième somme court sur l'ensemble des $(l_1,\ldots,l_{p+q})$ *et* $(k_1,\ldots,k_{p+q})$ *vérifiant* $l_1,\ldots,l_p\geq 0$, $l_{p+1},\ldots,l_{p+q}\geq 1$, $\sum_{i=1}^{p+q} l_i = l$, $k_1,\ldots,k_p\geq 1$, $k_{p+1},\ldots,k_{p+q}\geq 0$ *et* $\sum_{i=1}^{p+q} k_i = k$.

Identification de cette algèbre de Hopf

Proposition

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées est isomorphe à la structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a^{\theta}_{k,l})_{k,l\geq 1,\theta\in\{0,1\}}$ *donnée par la composition de paires de séries formelles* (F,G) *de la forme suivante :*

$$\begin{cases} F = x + \sum_{l,k\geq 1} a^0_{k,l}\frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}, \\ G = y + \sum_{l,k\geq 1} k a^1_{k,l}\frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}. \end{cases}$$

Application : Caractères sur une algèbre de Hopf d'incidence

Définition

Caractère : $\mathcal{H} \to \mathbb{Q}$ morphisme $\mathbb{Q}$-linéaire.

Étant donnés deux caractères ϕ et ψ, la convolution de ϕ et ψ est défini pour tout P par :

$$\phi * \psi(P) = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)}),$$

où $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$. L'unité pour cette loi est la counité de l'algèbre de Hopf d'incidence.

Application : Caractères sur une algèbre de Hopf d'incidence

Définition

Caractère : $\mathcal{H} \to \mathbb{Q}$ morphisme $\mathbb{Q}$-linéaire.

Étant donnés deux caractères ϕ et ψ, la convolution de ϕ et ψ est défini pour tout P par :

$$\phi * \psi(P) = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)}),$$

où $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$. L'unité pour cette loi est la counité de l'algèbre de Hopf d'incidence.

Avec l'identification de la page précédente, un caractère sur l'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées est alors un couple de séries formelles en deux variables et $*$ est la composition de ces séries.

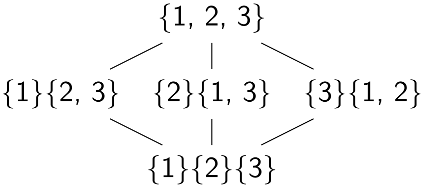
Application : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



 L'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées

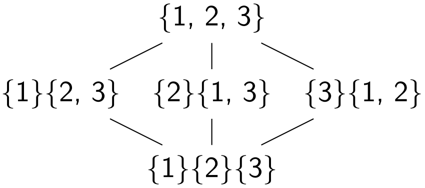
Application : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



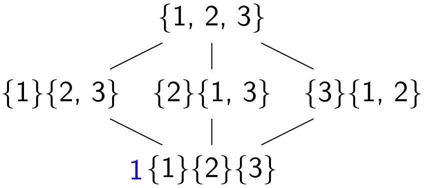
Application : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



 L'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées

Application : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, & \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), & \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

$\{1, 2, 3\}$

$-1\{1\}\{2, 3\}$ $-1\{2\}\{1, 3\}$ $-1\{3\}\{1, 2\}$

$1\{1\}\{2\}\{3\}$

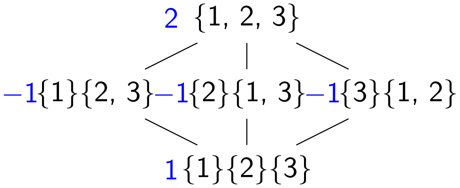
Application : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, & \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), & \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



Application : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

Nombre de Möbius $\rightarrow$ 2 $\{1, 2, 3\}$

$-1\{1\}\{2, 3\}$ $-1\{2\}\{1, 3\}$ $-1\{3\}\{1, 2\}$

$1\,\{1\}\{2\}\{3\}$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Les caractères ζ et μ sont définis sur tout poset P de l'algèbre par :

$$\zeta : P \mapsto 1$$

et

$$\mu : P \mapsto \mu(P),$$

où $\mu(P)$ est le nombre de Möbius du poset P.
Ces caractères sont inverses l'un de l'autre.

Application : Calcul des nombres de Möbius

Les caractères ζ et μ sont définis sur tout poset P de l'algèbre par :

$$\zeta : P \mapsto 1$$

et

$$\mu : P \mapsto \mu(P),$$

où $\mu(P)$ est le nombre de Möbius du poset P.
Ces caractères sont inverses l'un de l'autre.
D'après le calcul du coproduit, les nombres de Möbius des intervalles $\pi^0_{n,p}$ et $\pi^1_{n,p}$ sont respectivement les coefficients des séries A et B, satisfaisant :

$$\begin{aligned}(e^B - 1)e^A &= x \\ Ae^{A+B} &= y.\end{aligned}$$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Corollaire

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le nombre de Möbius de $\pi^1_{n,p}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

Le nombre de Möbius de $\pi^0_{n,p}$ auquel on ajoute p fois celui de $\pi^1_{n,p}$ est donné par :

$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{\ell!}(\ell+p)^{\ell}.$$

Merci de votre attention !