

Algèbres de lacets quantiques aux racines de l'unité et algèbres amassées généralisées

Anne-Sophie GLEITZ

LMNO, UCBN

Table des matières

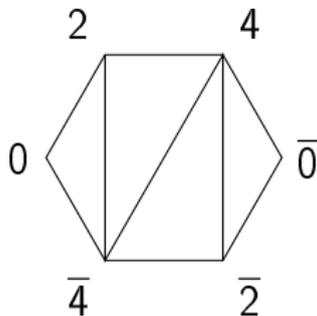
- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Représentations d'algèbres lacées quantiques en type A_1
- 3 Résultats en type A_2
- 4 Questions ouvertes

Exemple : type C_2

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :

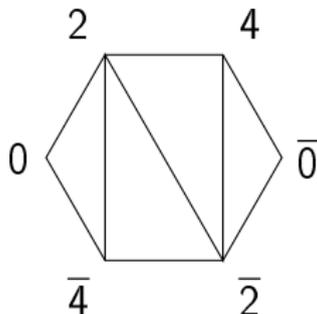


Exemple : type C_2

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :



$$x_{4\bar{4}} x_{2\bar{2}} = x_{2\bar{4}}^2 + 1$$

Les variables d'amas

Il y en a 6 : les variables initiales $x_{2\bar{4}}$, $x_{4\bar{4}}$, et

$$x_{0\bar{4}} = \frac{1 + x_{4\bar{4}}}{x_{2\bar{4}}}, \quad x_{2\bar{2}} = \frac{x_{2\bar{4}}^2 + 1}{x_{4\bar{4}}},$$

$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}x_{4\bar{4}}}(x_{2\bar{4}}^2 + 1 + x_{4\bar{4}}),$$

$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}^2x_{4\bar{4}}}(x_{2\bar{4}}^2 + 1 + 2x_{4\bar{4}} + x_{4\bar{4}}^2).$$

Les variables d'amas

Il y en a 6 : les variables initiales $x_{2\bar{4}}$, $x_{4\bar{4}}$, et

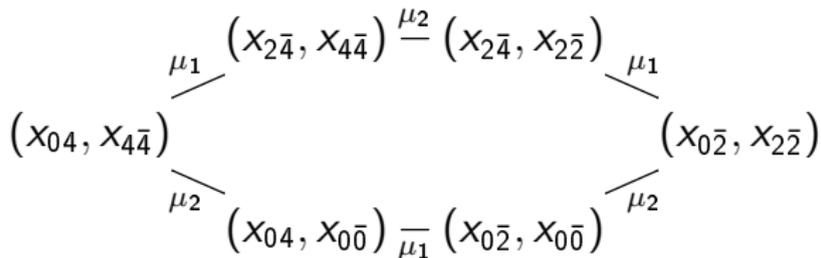
$$x_{04} = \frac{1 + x_{4\bar{4}}}{x_{2\bar{4}}}, \quad x_{2\bar{2}} = \frac{x_{2\bar{4}}^2 + 1}{x_{4\bar{4}}},$$

$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}x_{4\bar{4}}}(x_{2\bar{4}}^2 + 1 + x_{4\bar{4}}),$$

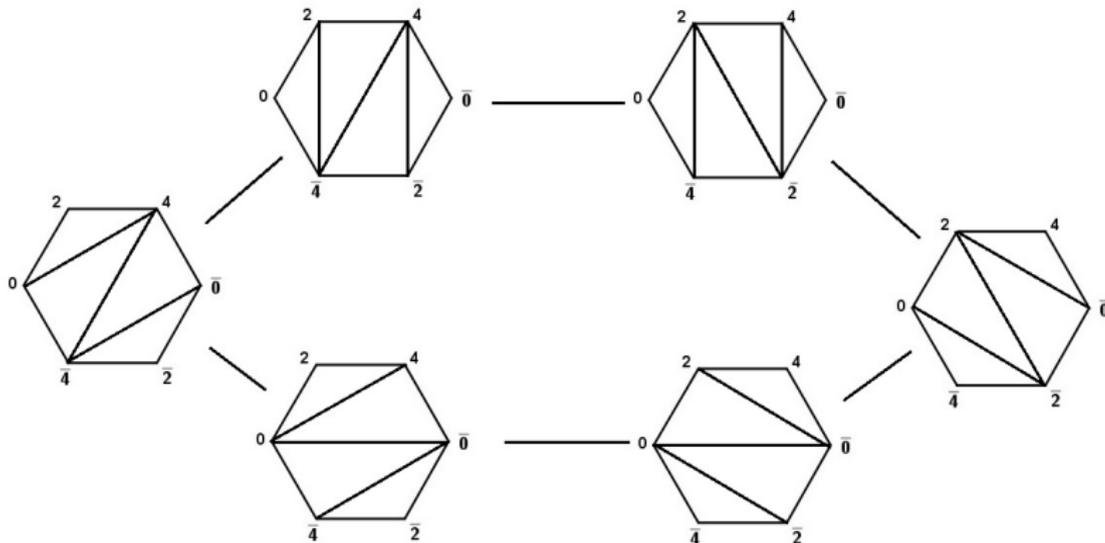
$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}^2x_{4\bar{4}}}(x_{2\bar{4}}^2 + 1 + 2x_{4\bar{4}} + x_{4\bar{4}}^2).$$

L'algèbre amassée $\mathcal{A}(x^0, B)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$ engendré par les variables d'amas.

Les amas en type C_2



Le cycloèdre de dimension 2



Exemple : type C_3 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}})$

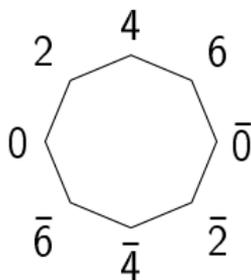
Exemple : type C_3 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}})$

Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple : type C_3 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}})$ Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

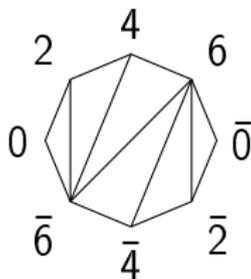
L'octogone P_8 :

Exemple : type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

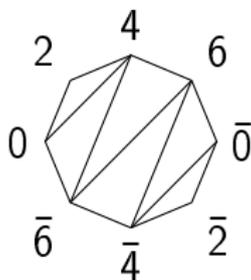
$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone \mathbf{P}_8 :



Exemple : type C_3 Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone \mathbf{P}_8 :

$$x_{2\bar{6}} x_{04} = x_{4\bar{6}} + 1$$

Les variables d'amas

Il y en a 12 : les variables initiales $x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}$, et

$$x_{04} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}}(x_{4\bar{6}} + 1), \quad x_{26} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}}(x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}}), \quad x_{44} = \frac{1}{x_{6\bar{6}}}(1 + x_{4\bar{6}}^2),$$

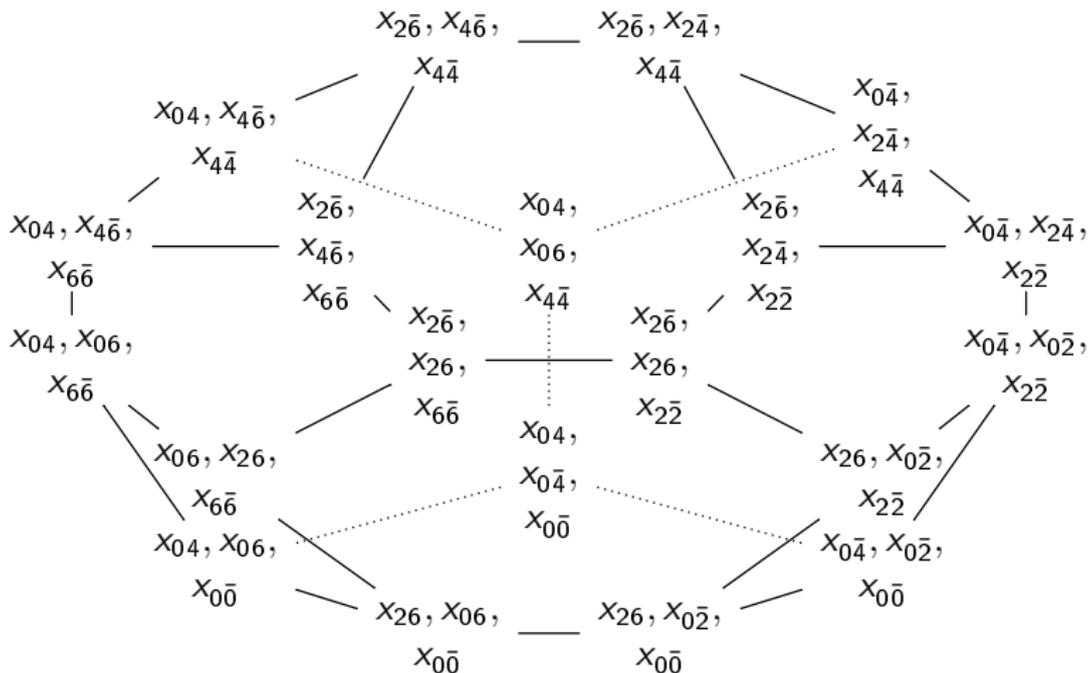
$$x_{04} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}}), \quad x_{06} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}}(x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{24} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}} + x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2),$$

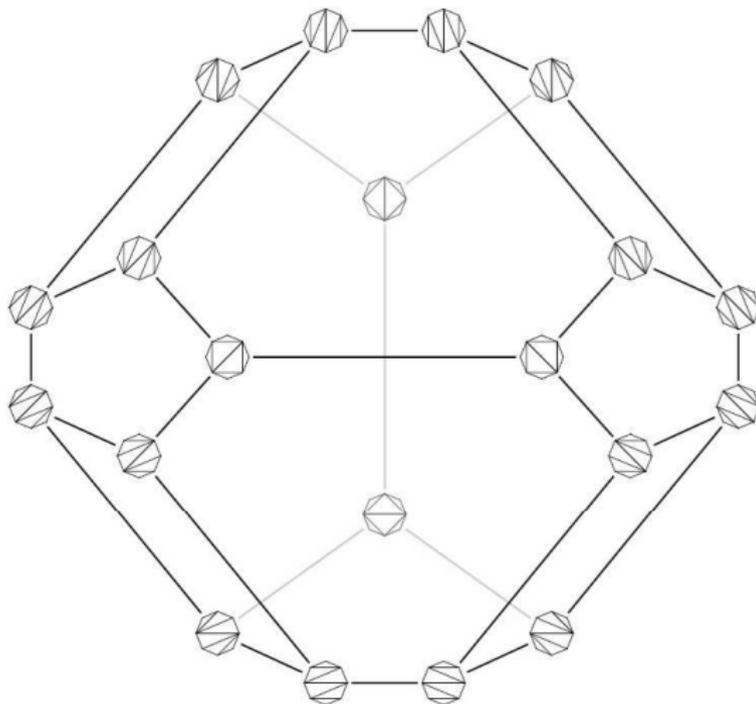
$$x_{02} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}}^2 + 2x_{2\bar{6}}x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{22} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 + x_{4\bar{6}}^2 + 2x_{2\bar{6}}x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{00} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}^2} \left(x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}^2 + 2x_{2\bar{6}}x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + 2x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}^2 \right).$$

Les amas en type C_3 

Le cycloèdre de dimension 3



Exemple : type C_n

Exemple : type C_n

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

Exemple : type C_n

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_{\overline{2n, 2k}}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

Exemple : type C_n

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_{2n,2k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

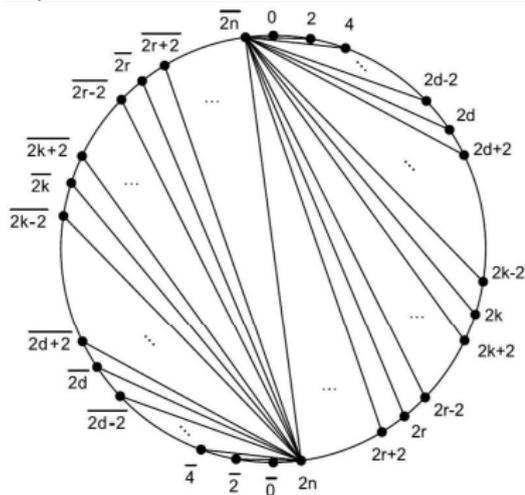
Exemple : type C_n

Exemple : type C_n

L'amas initial est représenté par la triangulation suivante du $2n + 2$ -gone \mathbf{P}_{2n+2} :

Exemple : type C_n

L'amas initial est représenté par la triangulation suivante du $2n + 2$ -gone P_{2n+2} :



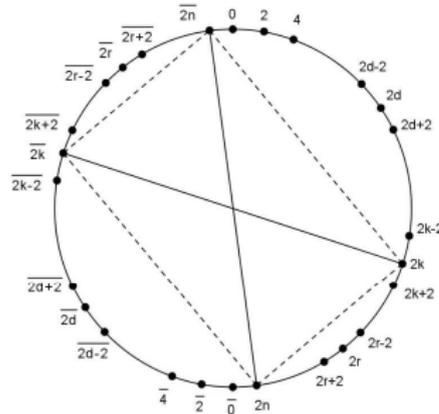
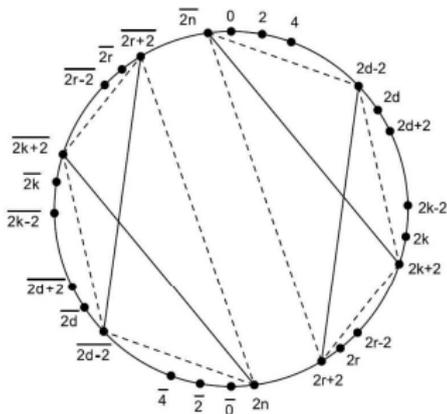
Relations d'échange en type C_n

Relations d'échange entre x_{ab} et x_{cd}

- Si $a \neq \bar{b}$, $c \neq \bar{d}$, et le quadrilatère $[acbd]$ est inscrit dans la moitié du cercle circonscrit à \mathbf{P}_{2n+2} :

$$x_{\overline{2n}, 2k+2} x_{2d-2, 2r+2} = x_{\overline{2n}, 2r+2} x_{2d-2, 2k+2} + x_{\overline{2n}, 2d-2} x_{2k+2, 2r+2}.$$

- Si $a = \bar{b}$ et $c = \bar{d}$: $x_{\overline{2n}, 2n} x_{\overline{2k}, 2k} = x_{\overline{2n}, 2k}^2 + x_{\overline{2k}, 2n}^2.$



Algèbres amassées généralisées

Algèbres amassées généralisées

- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)

Algèbres amassées généralisées

- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)
- Mêmes notions d'amas, de variables d'amas, de graine initiale...

Algèbres amassées généralisées

- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)
- Mêmes notions d'amas, de variables d'amas, de graine initiale...
- Les relations d'échange peuvent contenir plus que 2 monômes dans le membre de droite.

Algèbres amassées généralisées

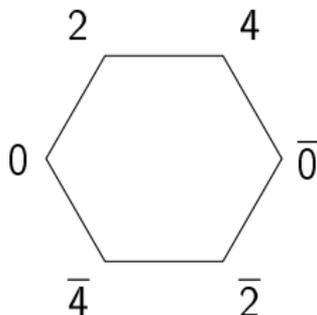
- Introduites et étudiées par Chekhov et Shapiro (2011), puis Nakanishi (2014)
- Mêmes notions d'amas, de variables d'amas, de graine initiale...
- Les relations d'échange peuvent contenir plus que 2 monômes dans le membre de droite.

Classification en type fini (Chekhov-Shapiro, 2011)

Les algèbres amassées généralisées de type fini peuvent être classifiées en termes des matrices de Cartan de types A_n à G_2 .

Exemple : type C_2 , corps ambiant : $\mathbb{Q}(\lambda, x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$ Graine initiale : $\Pi_0 := (x^0, B)$, avec

$$x^0 = (x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'hexagone \mathbf{P}_6 :

$$\begin{aligned} x_{2\bar{4}}x_{04} &= x_{4\bar{4}} + 1 \\ x_{4\bar{4}}x_{2\bar{2}} &= x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + 1 \end{aligned}$$

Les variables d'amas

Il y en a 6 : les variables initiales $x_{2\bar{4}}$, $x_{4\bar{4}}$, et

$$x_{0\bar{4}} = \frac{1 + x_{4\bar{4}}}{x_{2\bar{4}}}, \quad x_{2\bar{2}} = \frac{x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + 1}{x_{4\bar{4}}},$$

$$x_{0\bar{2}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}} x_{4\bar{4}}} (x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + 1 + x_{4\bar{4}}),$$

$$x_{0\bar{0}} = \frac{1}{x_{2\bar{4}}^2 x_{4\bar{4}}} (x_{2\bar{4}}^2 + \lambda x_{2\bar{4}} + \lambda x_{2\bar{4}} x_{4\bar{4}} + 1 + 2x_{4\bar{4}} + x_{4\bar{4}}^2).$$

L'algèbre amassée généralisée $\mathcal{A}(x^0, B)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(\lambda, x_{2\bar{4}}, x_{4\bar{4}})$ engendré par λ et les variables d'amas.

Exemple : Type C_3

Exemple : Type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

Exemple : Type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

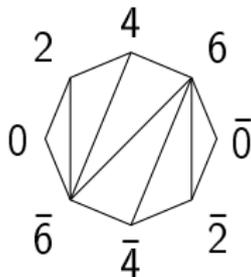
$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone P_8 :

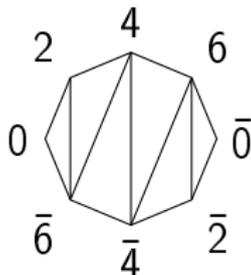


Exemple : Type C_3

Graine initiale : $\Pi_0 := (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = (x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'octogone \mathbf{P}_8 :



$$x_{6\bar{6}} x_{4\bar{4}} = x_{4\bar{6}}^2 + \lambda x_{4\bar{6}} + 1$$

Les variables d'amas

Il y en a 12 : les variables initiales $x_{2\bar{6}}, x_{4\bar{6}}, x_{6\bar{6}}$, et

$$x_{04} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}}(x_{4\bar{6}} + 1), \quad x_{26} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}}(x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}}), \quad x_{44} = \frac{1}{x_{6\bar{6}}}(1 + \lambda x_{4\bar{6}} + x_{4\bar{6}}^2),$$

$$x_{04} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}), \quad x_{06} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}}(x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{24} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}} + x_{6\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}} + x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2),$$

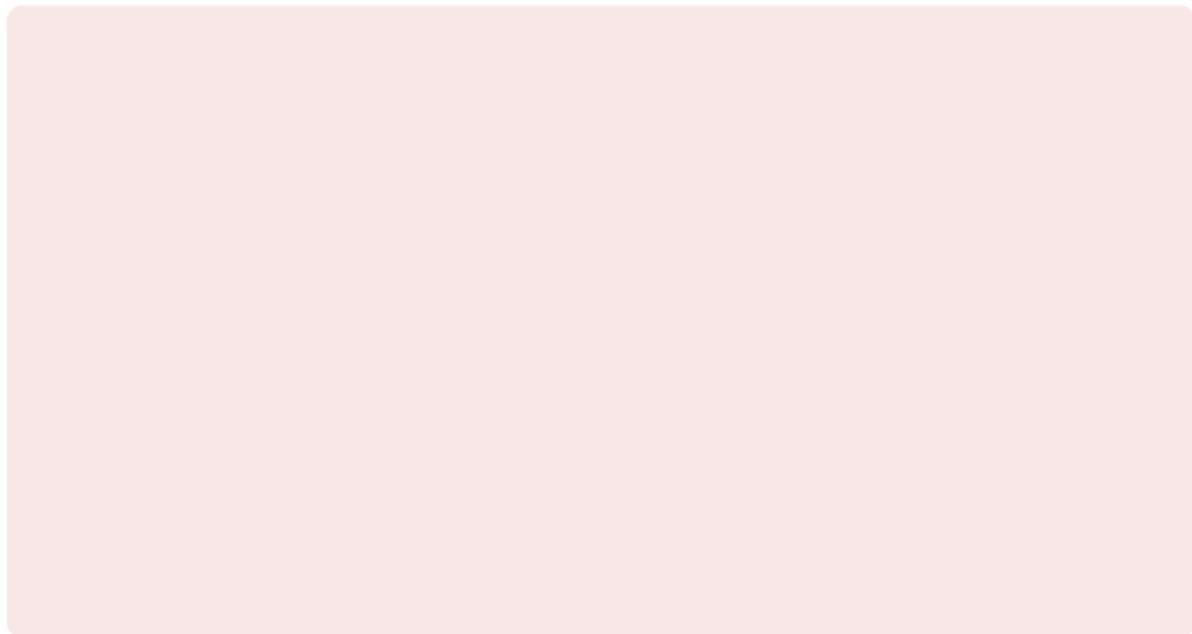
$$x_{02} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}}\left(\begin{array}{l} x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 + x_{6\bar{6}}^2 + \lambda x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}} \\ + \lambda x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}}x_{6\bar{6}} \end{array} \right),$$

$$x_{22} = \frac{1}{x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}}(x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + x_{2\bar{6}}^2 + x_{4\bar{6}}^2 + \lambda x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}}x_{6\bar{6}}),$$

$$x_{00} = \frac{1}{x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}^2}\left(\begin{array}{l} x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 + \lambda x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + \lambda x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}} + x_{2\bar{6}}^2x_{4\bar{6}}^2 \\ + x_{4\bar{6}}^2x_{6\bar{6}}^2 + 2x_{2\bar{6}}x_{6\bar{6}} + 2x_{2\bar{6}}x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}} + 2x_{4\bar{6}}x_{6\bar{6}}^2 \end{array} \right).$$

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)



La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)

Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_{\overline{2n, 2k}}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

La $\mathbb{Z}[\lambda]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{A}_n ($n \geq 2$)Graine initiale : $\Pi_0 = (\mathbf{x}^0, B)$, avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_{2n,2k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

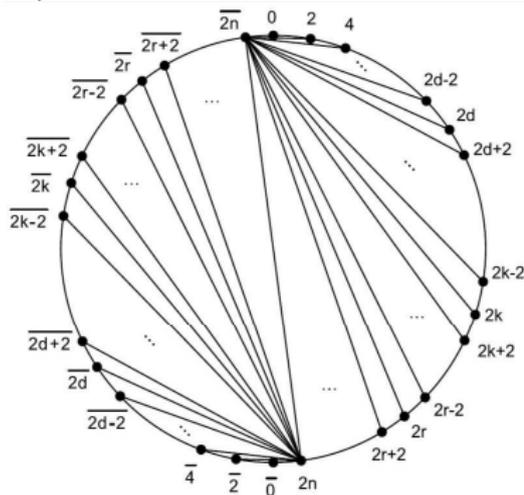
L'amas initial de \mathcal{A}_n

L'amas initial de \mathcal{A}_n

L'amas initial est représenté par la triangulation suivante du $2n + 2$ -gone \mathbf{P}_{2n+2} :

L'amas initial de \mathcal{A}_n

L'amas initial est représenté par la triangulation suivante du $2n + 2$ -gone \mathbf{P}_{2n+2} :



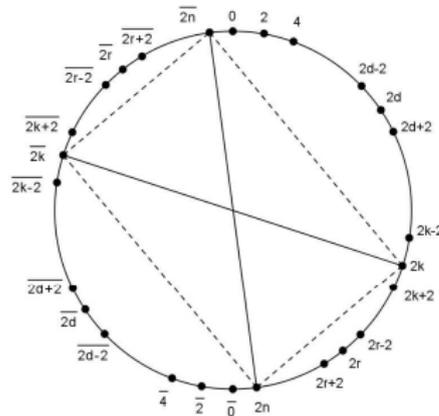
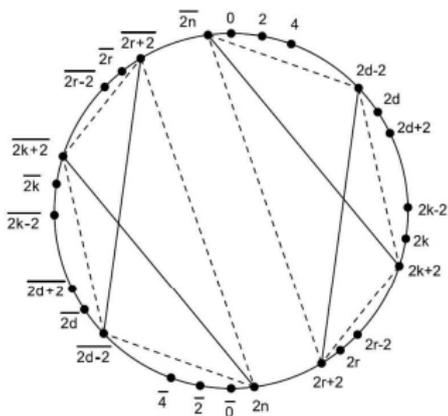
Relations d'échange dans \mathcal{A}_n

Relations d'échange entre x_{ab} et x_{cd}

- Si $a \neq \bar{b}$, $c \neq \bar{d}$, et le quadrilatère $[acbd]$ est inscrit dans la moitié du cercle circonscrit à \mathbf{P}_{2n+2} :

$$x_{\overline{2n}, 2k+2} x_{2d-2, 2r+2} = x_{\overline{2n}, 2r+2} x_{2d-2, 2k+2} + x_{\overline{2n}, 2d-2} x_{2k+2, 2r+2}.$$

- Si $a = \bar{b}$ et $c = \bar{d}$: $x_{\overline{2n}, 2n} x_{\overline{2k}, 2k} = x_{\overline{2n}, 2k}^2 + x_{\overline{2k}, 2n}^2 + \lambda x_{\overline{2n}, 2k} x_{\overline{2k}, 2n}$.



Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .
L'ensemble \mathcal{S} des monômes en les petites variables de \mathcal{A}_n est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .
L'ensemble \mathcal{S} des monômes en les petites variables de \mathcal{A}_n est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k(u) \in \mathbb{Z}[u]$ le k -ième polynôme de Tchebychev de 2nde espèce : $S_k(u)^2 = S_{k-1}(u)S_{k+1}(u) + 1$, où $S_0(u) = 1$ et $S_1(u) = u$.

Quelques bases de \mathcal{A}_n

Petites variables

Les *petites* variables d'amas sont les variables de la forme $x_{2k,2k+4}$.

Théorème

L'ensemble \mathcal{M}_0 des monômes d'amas de \mathcal{A}_n est une $\mathbb{Z}[\lambda]$ -base de \mathcal{A}_n .
L'ensemble \mathcal{S} des monômes en les petites variables de \mathcal{A}_n est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $S_k(u) \in \mathbb{Z}[u]$ le k -ième polynôme de Tchebychev de 2^{de} espèce : $S_k(u)^2 = S_{k-1}(u)S_{k+1}(u) + 1$, où $S_0(u) = 1$ et $S_1(u) = u$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{B} := \{S_k(\lambda) \cdot m, k \in \mathbb{N}, m \in \mathcal{M}_0\}$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{A}_n .

- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Représentations d'algèbres lacées quantiques en type A_1
- 3 Résultats en type A_2
- 4 Questions ouvertes

Algèbres affines quantiques

La $\mathbb{C}(q)$ -algèbre affine quantique $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Générateurs : $E_0, E_1, F_0, F_1, K_0, K_1$.

Relations :

$$K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \quad (i \in \{0, 1\}), \quad K_0 K_1 = K_1 K_0,$$

$$K_i E_i K_i^{-1} = q^2 E_i, \quad K_i F_i K_i^{-1} = q^{-2} F_i \quad (i \in \{0, 1\}),$$

$$K_i E_j K_i^{-1} = q^{-2} E_j, \quad K_i F_j K_i^{-1} = q^2 F_j \quad (i \neq j \in \{0, 1\}),$$

$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i \in \{0, 1\}), \quad \text{et pour } i \neq j \in \{0, 1\},$$

$$E_i^3 E_j - (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i^2 E_j E_i + (q^2 + 1 + q^{-2}) E_i E_j E_i^2 - E_j E_i^3 = 0,$$

La catégorie \mathcal{C}_q

Définition

Soit \mathcal{C}_q la catégorie (monoïdale, abélienne, non-semisimple) des représentations de dimension finie (type 1) de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Tout objet V de \mathcal{C}_q a un q -caractère $\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}, a \in \mathbb{C}(q)^\times]$.

La catégorie \mathcal{C}_q

Définition

Soit \mathcal{C}_q la catégorie (monoïdale, abélienne, non-semisimple) des représentations de dimension finie (type 1) de $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$.

Tout objet V de \mathcal{C}_q a un q -caractère $\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}, a \in \mathbb{C}(q)^\times]$.

Théorème (Frenkel-Reshetikhin, 1999)

Les modules simples S de \mathcal{C}_q sont paramétrés par le *plus haut monôme* m de leurs q -caractères; c'est un monôme *dominant* (exposants > 0). On écrit $S = L(m)$.

La catégorie \mathcal{C}_q

Définition

Soit \mathcal{C}_q la catégorie (monoïdale, abélienne, non-semisimple) des représentations de dimension finie (type 1) de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Tout objet V de \mathcal{C}_q a un q -caractère $\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_a^{\pm 1}, a \in \mathbb{C}(q)^\times]$.

Théorème (Frenkel-Reshetikhin, 1999)

Les modules simples S de \mathcal{C}_q sont paramétrés par le *plus haut monôme* m de leurs q -caractères; c'est un monôme *dominant* (exposants > 0). On écrit $S = L(m)$.

Soit $\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}}$ la sous-catégorie de \mathcal{C}_q dont les objets V ont leurs caractères $\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{q^{2k}}^{\pm 1}, k \in \mathbb{Z}]$.

Modules de Kirillov-Reshetikhin

Définition

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets de $\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}}$ de la forme

$$W_{k,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}} Y_{q^{2r+2}} \dots Y_{q^{2(r+k-1)}}), \quad k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{Z}.$$

Modules de Kirillov-Reshetikhin

Définition

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets de $\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}}$ de la forme

$$W_{k,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}} Y_{q^{2r+2}} \dots Y_{q^{2(r+k-1)}}), \quad k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{Z}.$$

$W_{1,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}})$ est un *module fondamental*.

Modules de Kirillov-Reshetikhin

Définition

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets de $\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}}$ de la forme

$$W_{k,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}} Y_{q^{2r+2}} \dots Y_{q^{2(r+k-1)}}), \quad k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{Z}.$$

$W_{1,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}})$ est un *module fondamental*.

Convention : $W_{0,q^{2r}}$ est la représentation triviale.

Modules de Kirillov-Reshetikhin

Définition

Modules de Kirillov-Reshetikhin : objets de $\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}}$ de la forme

$$W_{k,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}} Y_{q^{2r+2}} \dots Y_{q^{2(r+k-1)}}), \quad k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{Z}.$$

$W_{1,q^{2r}} = L(Y_{q^{2r}})$ est un *module fondamental*.

Convention : $W_{0,q^{2r}}$ est la représentation triviale.

Théorème (Chari-Pressley, 1990)

Les classes $[W_{k,q^{2r}}]$ dans l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}})$ satisfont le T -système : pour $k \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{Z}$,

$$[W_{k,q^{2r}}][W_{k,q^{2r+2}}] = [W_{k+1,q^{2r}}][W_{k-1,q^{2r+2}}] + 1.$$

Modules simples de $\mathcal{C}_q\mathbb{Z}$

Modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$

Au module $W_{k,q^{2r}}$, on associe le q -segment
 $\Sigma(k, q^{2r}) = \{q^{2r}, q^{2r+2}, \dots, q^{2r+2k-2}\}.$

Modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$

Au module $W_{k,q^{2r}}$, on associe le q -segment

$$\Sigma(k, q^{2r}) = \{q^{2r}, q^{2r+2}, \dots, q^{2r+2k-2}\}.$$

Deux q -segments sont en *position générale* si l'un contient l'autre ou si leur réunion n'est pas un q -segment.

Modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$

Au module $W_{k,q^{2r}}$, on associe le q -segment

$$\Sigma(k, q^{2r}) = \{q^{2r}, q^{2r+2}, \dots, q^{2r+2k-2}\}.$$

Deux q -segments sont en *position générale* si l'un contient l'autre ou si leur réunion n'est pas un q -segment.

Exemple : $\{1, q^2, q^4\}$ et $\{q^2, q^4, q^6, q^8\}$ pas en position générale.

Modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$

Au module $W_{k,q^{2r}}$, on associe le q -segment

$$\Sigma(k, q^{2r}) = \{q^{2r}, q^{2r+2}, \dots, q^{2r+2k-2}\}.$$

Deux q -segments sont en *position générale* si l'un contient l'autre ou si leur réunion n'est pas un q -segment.

Exemple : $\{1, q^2, q^4\}$ et $\{q^8\}$ en position générale.

Modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$

Au module $W_{k,q^{2r}}$, on associe le q -segment
 $\Sigma(k, q^{2r}) = \{q^{2r}, q^{2r+2}, \dots, q^{2r+2k-2}\}$.

Deux q -segments sont en *position générale* si l'un contient l'autre ou si leur réunion n'est pas un q -segment.

Exemple : $\{1, q^2, q^4\}$ et $\{q^8\}$ en position générale.

Théorème (Chari-Pressley, 1991)

Les modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme $\bigotimes_{t=1}^s W_{k_t, q^{2r_t}}$,
 où $s, k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}^*$, $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{Z}$, et pour $t \neq u \in \llbracket 1, s \rrbracket$, les
 q -segments $\Sigma(k_t, q^{2r_t})$ et $\Sigma(k_u, q^{2r_u})$ sont en position générale.

Modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$

Au module $W_{k,q^{2r}}$, on associe le q -segment
 $\Sigma(k, q^{2r}) = \{q^{2r}, q^{2r+2}, \dots, q^{2r+2k-2}\}$.

Deux q -segments sont en *position générale* si l'un contient l'autre ou si leur réunion n'est pas un q -segment.

Exemple : $\{1, q^2, q^4\}$ et $\{q^8\}$ en position générale.

Théorème (Chari-Pressley, 1991)

Les modules simples de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme $\bigotimes_{t=1}^s W_{k_t, q^{2r_t}}$,
 où $s, k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}^*$, $r_1, \dots, r_s \in \mathbb{Z}$, et pour $t \neq u \in \llbracket 1, s \rrbracket$, les
 q -segments $\Sigma(k_t, q^{2r_t})$ et $\Sigma(k_u, q^{2r_u})$ sont en position générale.

Les modules $W_{k,q^{2r}}$ sont donc les modules *premiers* de $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$.

Spécialisation de q à une racine de l'unité ε

Spécialisation de q à une racine de l'unité ε

- L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ devient $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$

Spécialisation de q à une racine de l'unité ε

- L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ devient $U_\varepsilon^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_2)$
- La catégorie $\mathcal{C}_{q^{\mathbb{Z}}}$ devient $\mathcal{C}_{\varepsilon^{\mathbb{Z}}}$

Spécialisation de q à une racine de l'unité ε

- L'algèbre $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ devient $U_\varepsilon^{\text{res}}(L\mathfrak{sl}_2)$
- La catégorie $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$ devient $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$
- Tout objet V de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ a un ε -caractère $\chi_\varepsilon(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2k}}^{\pm 1}, k \in \mathbb{Z}]$.

Spécialisation de q à une racine de l'unité ε

- L'algèbre $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ devient $U_\varepsilon^{\text{res}}(L\mathfrak{sl}_2)$
- La catégorie $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$ devient $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$
- Tout objet V de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ a un ε -caractère $\chi_\varepsilon(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2k}}^{\pm 1}, k \in \mathbb{Z}]$.

Théorème (Chari-Pressley (1997), Frenkel-Mukhin (2002))

Les modules simples S de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ sont paramétrés par le *plus haut monôme* m de leurs ε -caractères, où q est remplacé par ε ; c'est un monôme *dominant* (exposants > 0). On écrit

$$S = L(m).$$

Spécialisation de q à une racine de l'unité ε

- L'algèbre $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$ devient $U_\varepsilon^{\text{res}}(L\mathfrak{sl}_2)$
- La catégorie $\mathcal{C}_{q\mathbb{Z}}$ devient $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$
- Tout objet V de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ a un ε -caractère $\chi_\varepsilon(V) \in \mathbb{Z}[Y_{\varepsilon^{2k}}^{\pm 1}, k \in \mathbb{Z}]$.

Théorème (Chari-Pressley (1997), Frenkel-Mukhin (2002))

Les modules simples S de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ sont paramétrés par le *plus haut monôme* m de leurs ε -caractères, où q est remplacé par ε ; c'est un monôme *dominant* (exposants > 0). On écrit

$$S = L(m).$$

On note ℓ l'ordre de ε .

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Soit $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \dots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Soit $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \dots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

- Si $k < \ell$: $W_{k,q^{2r}}$ se spécialise à $q = \varepsilon$, en
 $W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \dots Y_{2(r+k-1)}),$
 irréductible et premier.

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Soit $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \dots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

- Si $k < \ell$: $W_{k,q^{2r}}$ se spécialise à $q = \varepsilon$, en $W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \dots Y_{2(r+k-1)})$, irréductible et premier.
- Si $k = \ell$: $W_{\ell,q^{2r}}$ se spécialise en un module non-irréductible.

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Soit $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \dots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

- Si $k < \ell$: $W_{k,q^{2r}}$ se spécialise à $q = \varepsilon$, en $W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \dots Y_{2(r+k-1)})$, irréductible et premier.
- Si $k = \ell$: $W_{\ell,q^{2r}}$ se spécialise en un module non-irréductible. Le module simple de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ de plus haut monôme \mathbf{Y}_1 est $L(\mathbf{Y}_1)$,

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Soit $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \dots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

- Si $k < \ell$: $W_{k,q^{2r}}$ se spécialise à $q = \varepsilon$, en $W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \dots Y_{2(r+k-1)})$, irréductible et premier.
- Si $k = \ell$: $W_{\ell,q^{2r}}$ se spécialise en un module non-irréductible. Le module simple de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ de plus haut monôme \mathbf{Y}_1 est $L(\mathbf{Y}_1)$, où $\chi_{\varepsilon}(L(\mathbf{Y}_1)) = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^{-1}$.

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Soit $Y_n := Y_{\varepsilon^n}$ et $\mathbf{Y}_1 := Y_0 Y_2 \dots Y_{2\ell-2}$. Soit $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

- Si $k < \ell$: $W_{k,q^{2r}}$ se spécialise à $q = \varepsilon$, en $W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r}) = L(Y_{2r} Y_{2r+2} Y_{2r+4} \dots Y_{2(r+k-1)})$, irréductible et premier.
- Si $k = \ell$: $W_{\ell,q^{2r}}$ se spécialise en un module non-irréductible. Le module simple de $\mathcal{C}_{\varepsilon^{\mathbb{Z}}}$ de plus haut monôme \mathbf{Y}_1 est $L(\mathbf{Y}_1)$, où $\chi_{\varepsilon}(L(\mathbf{Y}_1)) = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_1^{-1}$.
- Si $k = n\ell + b$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq b < \ell$) : $W_{k,q^{2r}}$ se spécialise en un module non-irréductible :

$$\chi_{\varepsilon}(L(Y_{2r} \dots Y_{2r+2n\ell+2b-2})) = \chi_{\varepsilon}(W_{\varepsilon}(b, \varepsilon^{2r})) S_n(\chi_{\varepsilon}(L(\mathbf{Y}_1))).$$

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Les classes des modules $W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r})$ dans l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$, pour $k < \ell - 1$, satisfont le T -système :

$$[W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r})][W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r+2})] = [W_\varepsilon(k+1, \varepsilon^{2r})][W_\varepsilon(k-1, \varepsilon^{2r+2})] + 1.$$

Modules de Kirillov-Reshetikhin spécialisés

Les classes des modules $W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r})$ dans l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$, pour $k < \ell - 1$, satisfont le T -système :

$$[W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r})][W_\varepsilon(k, \varepsilon^{2r+2})] = [W_\varepsilon(k+1, \varepsilon^{2r})][W_\varepsilon(k-1, \varepsilon^{2r+2})] + 1.$$

La $(\ell - 1)$ -ième relation est différente :

$$\begin{aligned} [W_\varepsilon(\ell - 1, 1)][W_\varepsilon(\ell - 1, \varepsilon^2)] \\ = [W_\varepsilon(\ell - 2, \varepsilon^2)][L(\mathbf{Y}_1)] + 1 + [W_\varepsilon(\ell - 2, \varepsilon^2)]^2. \end{aligned}$$

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

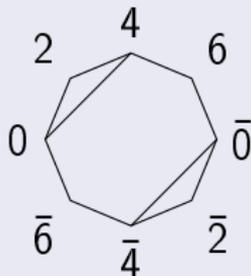
$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
 et $[2r - 2, 2r + 2k]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
 et $[2r - 2, 2r + 2k]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Exemple pour $\ell = 4$

$W_{\varepsilon}(1, \varepsilon^2) = L(Y_2) \leftrightarrow$ diagonales de l'octogone \mathbf{P}_8 :

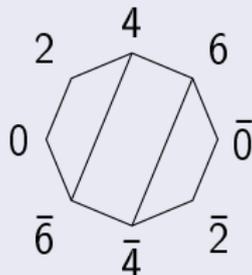


Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
et $[2r - 2, 2r + 2k]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Exemple pour $\ell = 4$

$W_{\varepsilon}(2, \varepsilon^0) = L(Y_0 Y_2) \leftrightarrow$ diagonales de l'octogone \mathbf{P}_8 :

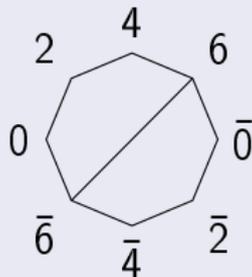


Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

$W_{\varepsilon}(k, \varepsilon^{2r})$ ($k < \ell$, $r \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$) \leftrightarrow diagonales $[2r - 2, 2r + 2k]$
 et $[2r - 2, 2r + 2k]$ de $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Exemple pour $\ell = 4$

$W_{\varepsilon}(3, \varepsilon^0) = L(Y_0 Y_2 Y_4) \leftrightarrow$ diamètre de l'octogone \mathbf{P}_8 :



Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Théorème (Chari-Pressley, 1997)

Les modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme

$$\bigotimes_{t=1}^r W_{\varepsilon}(k_t, \varepsilon^{2d_t})^{\otimes a_t} \otimes L(\mathbf{Y}_1^a),$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}$,
 $a_1, \dots, a_r, a \in \mathbb{N}$, et pour $t \neq s \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les diagonales
 $[2d_t - 2, 2d_t + 2k_t]$ et $[2d_s - 2, 2d_s + 2k_s]$ ne se coupent pas
dans $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$

Théorème (Chari-Pressley, 1997)

Les modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ sont tous de la forme

$$\bigotimes_{t=1}^r W_{\varepsilon}(k_t, \varepsilon^{2d_t})^{\otimes a_t} \otimes L(\mathbf{Y}_1^a),$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{Z}$,
 $a_1, \dots, a_r, a \in \mathbb{N}$, et pour $t \neq s \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les diagonales
 $[2d_t - 2, 2d_t + 2k_t]$ et $[2d_s - 2, 2d_s + 2k_s]$ ne se coupent pas
dans $\mathbf{P}_{2\ell}$.

Théorème (Chari-Pressley)

On a $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}) \cong \mathbb{Z}[[L(Y_{\varepsilon^{2r}})]]$, $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.

Le résultat principal

Le résultat principal

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Le résultat principal

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Théorème (G. (2014))

Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow R$ tel que

$$\varphi(x_{2r,2d}) = [L(Y_{2r+2} \cdots Y_{2d-2})] \quad (r, d \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket, |r-d| < \ell),$$

$$\varphi(\lambda) = [L(\mathbf{Y}_1)].$$

Le résultat principal

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Théorème (G. (2014))

Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow R$ tel que
 $\varphi(x_{2r,2d}) = [L(Y_{2r+2} \cdots Y_{2d-2})]$ ($r, d \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket, |r-d| < \ell$),
 $\varphi(\lambda) = [L(\mathbf{Y}_1)]$.

La \mathbb{Z} -base des monômes en les petites variables de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ est envoyée sur la base des classes de modules standard de R .

Le résultat principal

Soit $R := K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$ l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}}$ pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Théorème (G. (2014))

Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A}_{\ell-1} \rightarrow R$ tel que
 $\varphi(x_{2r,2d}) = [L(Y_{2r+2} \cdots Y_{2d-2})]$ ($r, d \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket, |r-d| < \ell$),
 $\varphi(\lambda) = [L(\mathbf{Y}_1)]$.

La \mathbb{Z} -base des monômes en les petites variables de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ est envoyée sur la base des classes de modules standard de R .

La \mathbb{Z} -base \mathcal{B} de $\mathcal{A}_{\ell-1}$ (monômes d'amas généralisés) est envoyée sur la base B des classes des modules simples de R .

- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Représentations d'algèbres lacées quantiques en type A_1
- 3 Résultats en type A_2
- 4 Questions ouvertes

Type A_2 , cas $\ell = 2$

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $Y_{i,n} = Y_{i,\varepsilon^n}$, $\mathbf{Y}_1 = Y_{1,0} Y_{1,2}$ et $\mathbf{Y}_2 = Y_{2,1} Y_{2,3}$.

Type A_2 , cas $\ell = 2$

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $Y_{i,n} = Y_{i,\varepsilon^n}$, $\mathbf{Y}_1 = Y_{1,0} Y_{1,2}$ et $\mathbf{Y}_2 = Y_{2,1} Y_{2,3}$.

Théorème (G. (2014))

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon^z}$ en type A_2 , $\ell = 2$: $L(m) = L(\mathbf{Y}_1^k \mathbf{Y}_2^r) \otimes L(m^0)$,

Type A_2 , cas $\ell = 2$

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $Y_{i,n} = Y_{i,\varepsilon^n}$, $\mathbf{Y}_1 = Y_{1,0} Y_{1,2}$ et $\mathbf{Y}_2 = Y_{2,1} Y_{2,3}$.

Théorème (G. (2014))

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon^z}$ en type A_2 , $\ell = 2$: $L(m) = L(\mathbf{Y}_1^k \mathbf{Y}_2^r) \otimes L(m^0)$,
où $L(m^0)$ est l'un des 8 produits tensoriels suivants :

- | | | | |
|-------|---|--------|---|
| (i) | $L(Y_{1,0})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,1})^{\otimes b}$ | (ii) | $L(Y_{2,1})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,1})^{\otimes b}$ |
| (iii) | $L(Y_{1,0})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,3})^{\otimes b}$ | (iv) | $L(Y_{2,3})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,3})^{\otimes b}$ |
| (v) | $L(Y_{1,2})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,1})^{\otimes b}$ | (vi) | $L(Y_{2,1})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,1})^{\otimes b}$ |
| (vii) | $L(Y_{1,2})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,3})^{\otimes b}$ | (viii) | $L(Y_{2,3})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,3})^{\otimes b}$. |

Type A_2 , cas $\ell = 2$

Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $Y_{i,n} = Y_{i,\varepsilon^n}$, $\mathbf{Y}_1 = Y_{1,0} Y_{1,2}$ et $\mathbf{Y}_2 = Y_{2,1} Y_{2,3}$.

Théorème (G. (2014))

Modules simples de $\mathcal{C}_{\varepsilon^z}$ en type A_2 , $\ell = 2$: $L(m) = L(\mathbf{Y}_1^k \mathbf{Y}_2^r) \otimes L(m^0)$,
où $L(m^0)$ est l'un des 8 produits tensoriels suivants :

- | | | | |
|-------|---|--------|---|
| (i) | $L(Y_{1,0})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,1})^{\otimes b}$ | (ii) | $L(Y_{2,1})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,1})^{\otimes b}$ |
| (iii) | $L(Y_{1,0})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,3})^{\otimes b}$ | (iv) | $L(Y_{2,3})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,0} Y_{2,3})^{\otimes b}$ |
| (v) | $L(Y_{1,2})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,1})^{\otimes b}$ | (vi) | $L(Y_{2,1})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,1})^{\otimes b}$ |
| (vii) | $L(Y_{1,2})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,3})^{\otimes b}$ | (viii) | $L(Y_{2,3})^{\otimes a} \otimes L(Y_{1,2} Y_{2,3})^{\otimes b}$. |

Ici, $K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon^z}) \cong \mathbb{Z}[[L(Y_{1,0}), [L(Y_{1,2}), [L(Y_{2,1}), [L(Y_{2,3})]]]]$.

Il existe une famille de polynômes à 2 paramètres telle que
 $[L(\mathbf{Y}_1^{a_1} \mathbf{Y}_2^{a_2})] = S_{a_1, a_2}([L(\mathbf{Y}_1)], [L(\mathbf{Y}_2)])$ pour tous $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$.

Cas $\ell = 2$: Relations entre ε -caractères

Cas $\ell = 2$: Relations entre ε -caractères

Pour $i \in \{0, 2\}$ et $j \in \{1, 3\}$, on a

Cas $\ell = 2$: Relations entre ε -caractères

Pour $i \in \{0, 2\}$ et $j \in \{1, 3\}$, on a

$$\chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))\chi_\varepsilon(L(Y_{2,j})) = \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i} Y_{2,j})) + 1$$

Cas $\ell = 2$: Relations entre ε -caractères

Pour $i \in \{0, 2\}$ et $j \in \{1, 3\}$, on a

$$\chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))\chi_\varepsilon(L(Y_{2,j})) = \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}Y_{2,j})) + 1$$

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}Y_{2,1}))\chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}Y_{2,3})) = & \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))^3 + \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))^2\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_2)) \\ & + \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_1)) + 1 \end{aligned}$$

Cas $\ell = 2$: Relations entre ε -caractères

Pour $i \in \{0, 2\}$ et $j \in \{1, 3\}$, on a

$$\chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))\chi_\varepsilon(L(Y_{2,j})) = \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}Y_{2,j})) + 1$$

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}Y_{2,1}))\chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}Y_{2,3})) = & \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))^3 + \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))^2\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_2)) \\ & + \chi_\varepsilon(L(Y_{1,i}))\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_1)) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(L(Y_{1,0}Y_{2,j}))\chi_\varepsilon(L(Y_{1,2}Y_{2,j})) = & \chi_\varepsilon(L(Y_{2,j}))^3 + \chi_\varepsilon(L(Y_{2,j}))^2\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_1)) \\ & + \chi_\varepsilon(L(Y_{2,j}))\chi_\varepsilon(L(\mathbf{Y}_2)) + 1. \end{aligned}$$

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

La $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{G}

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

La $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{G}

Graine initiale : (\mathbf{x}^0, B) , avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1, x_2\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

La $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{G}

Graine initiale : (\mathbf{x}^0, B) , avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1, x_2\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre $\mathcal{G} \subset \mathbb{Q}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2)$ contient 8 variables d'amas x_1, \dots, x_8 .

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

La $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{G}

Graine initiale : (\mathbf{x}^0, B) , avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1, x_2\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre $\mathcal{G} \subset \mathbb{Q}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2)$ contient 8 variables d'amas x_1, \dots, x_8 .

$$x_1 x_3 = x_2 + 1.$$

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

La $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{G}

Graine initiale : (\mathbf{x}^0, B) , avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1, x_2\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'algèbre $\mathcal{G} \subset \mathbb{Q}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2)$ contient 8 variables d'amas x_1, \dots, x_8 .

$$x_1 x_3 = x_2 + 1. \quad x_2 x_8 = x_1^3 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_1 + 1.$$

Cas $\ell = 2$: l'algèbre \mathcal{G} de type G_2

La $\mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2]$ -algèbre amassée généralisée \mathcal{G}

Graine initiale : (\mathbf{x}^0, B) , avec

$$\mathbf{x}^0 = \{x_1, x_2\}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

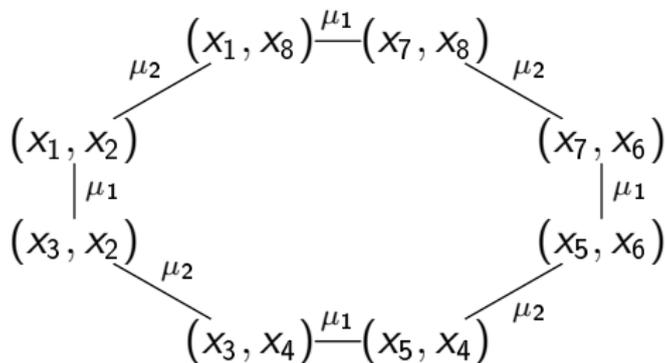
L'algèbre $\mathcal{G} \subset \mathbb{Q}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2)$ contient 8 variables d'amas x_1, \dots, x_8 .

$$x_1 x_3 = x_2 + 1. \quad x_2 x_8 = x_1^3 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 x_1 + 1.$$

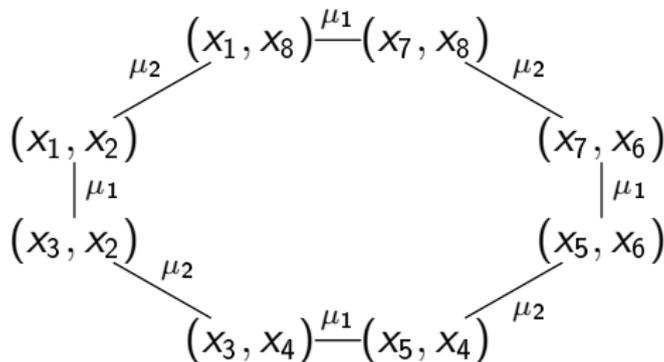
On a $\mathcal{G} \cong \mathbb{Z}[x_1, x_3, x_5, x_7]$.

Les amas de \mathcal{G}

Les amas de \mathcal{G}



Les amas de \mathcal{G}



L'ensemble

$\mathcal{H} = \{S_{a_1, a_2}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot m, a_1, a_2 \in \mathbb{N}, m \text{ monôme d'amas}\}$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{G} .

Structure amassée de $R = K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon}\mathbb{Z})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\ell = 2$

Structure amassée de $R = K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\ell = 2$

Théorème (G. (2014))

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, il existe un isomorphisme d'anneaux $\eta : \mathcal{G} \rightarrow R$ tel que

Structure amassée de $R = K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\ell = 2$

Théorème (G. (2014))

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, il existe un isomorphisme d'anneaux

$\eta : \mathcal{G} \rightarrow R$ tel que

$$\begin{array}{lll} \eta(x_1) = [L(Y_{1,0})] & \eta(x_2) = [L(Y_{1,0} Y_{2,3})] & \eta(x_3) = [L(Y_{2,3})] \\ \eta(x_4) = [L(Y_{1,2} Y_{2,3})] & \eta(x_5) = [L(Y_{1,2})] & \eta(x_6) = [L(Y_{1,2} Y_{2,1})] \\ \eta(x_7) = [L(Y_{2,1})] & \eta(x_8) = [L(Y_{1,0} Y_{2,1})] & \\ \eta(\lambda_1) = [L(\mathbf{Y}_1)] & \eta(\lambda_2) = [L(\mathbf{Y}_2)]. & \end{array}$$

Structure amassée de $R = K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\ell = 2$

Théorème (G. (2014))

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, il existe un isomorphisme d'anneaux

$\eta : \mathcal{G} \rightarrow R$ tel que

$$\begin{aligned} \eta(x_1) &= [L(Y_{1,0})] & \eta(x_2) &= [L(Y_{1,0} Y_{2,3})] & \eta(x_3) &= [L(Y_{2,3})] \\ \eta(x_4) &= [L(Y_{1,2} Y_{2,3})] & \eta(x_5) &= [L(Y_{1,2})] & \eta(x_6) &= [L(Y_{1,2} Y_{2,1})] \\ \eta(x_7) &= [L(Y_{2,1})] & \eta(x_8) &= [L(Y_{1,0} Y_{2,1})] \\ \eta(\lambda_1) &= [L(\mathbf{Y}_1)] & \eta(\lambda_2) &= [L(\mathbf{Y}_2)]. \end{aligned}$$

La \mathbb{Z} -base des monômes en x_1, x_3, x_5, x_7 de \mathcal{G} est envoyée sur la base des classes des modules standard dans R .

Structure amassée de $R = K_0(\mathcal{C}_{\varepsilon\mathbb{Z}})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, $\ell = 2$

Théorème (G. (2014))

Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et $\ell = 2$, il existe un isomorphisme d'anneaux

$\eta : \mathcal{G} \rightarrow R$ tel que

$$\begin{aligned} \eta(x_1) &= [L(Y_{1,0})] & \eta(x_2) &= [L(Y_{1,0} Y_{2,3})] & \eta(x_3) &= [L(Y_{2,3})] \\ \eta(x_4) &= [L(Y_{1,2} Y_{2,3})] & \eta(x_5) &= [L(Y_{1,2})] & \eta(x_6) &= [L(Y_{1,2} Y_{2,1})] \\ \eta(x_7) &= [L(Y_{2,1})] & \eta(x_8) &= [L(Y_{1,0} Y_{2,1})] & & \\ \eta(\lambda_1) &= [L(\mathbf{Y}_1)] & \eta(\lambda_2) &= [L(\mathbf{Y}_2)]. & & \end{aligned}$$

La \mathbb{Z} -base des monômes en x_1, x_3, x_5, x_7 de \mathcal{G} est envoyée sur la base des classes des modules standard dans R .

La \mathbb{Z} -base \mathcal{H} (monômes d'amas généralisés) de \mathcal{G} est envoyée sur la base B des classes des modules simples de R .

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Pour $\ell \geq 2$, l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon^Z}$ est isomorphe à une algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$.

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Pour $\ell \geq 2$, l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon^Z}$ est isomorphe à une algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$. Une graine initiale de \mathcal{G}_ℓ est donnée par la matrice d'échange

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Pour $\ell \geq 2$, l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}_{\varepsilon^Z}$ est isomorphe à une algèbre amassée généralisée \mathcal{G}_ℓ de rang $2\ell - 2$. Une graine initiale de \mathcal{G}_ℓ est donnée par la matrice d'échange

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Variables d'amas :

$$x_{2k+1} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} \dots Y_{1,2\ell-2k})] \quad (k \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2k} = [L(Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,2\ell-2k+1})] \quad (k \in \llbracket 1, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2\ell-2} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} Y_{1,2\ell-4} \dots Y_{1,4} Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,5} Y_{2,3})].$$

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Variables d'amas :

$$x_{2k+1} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} \dots Y_{1,2\ell-2k})] \quad (k \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2k} = [L(Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,2\ell-2k+1})] \quad (k \in \llbracket 1, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2\ell-2} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} Y_{1,2\ell-4} \dots Y_{1,4} Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,5} Y_{2,3})].$$

Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, $i = 1, 2$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Variables d'amas :

$$x_{2k+1} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} \dots Y_{1,2\ell-2k})] \quad (k \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2k} = [L(Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,2\ell-2k+1})] \quad (k \in \llbracket 1, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2\ell-2} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} Y_{1,2\ell-4} \dots Y_{1,4} Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,5} Y_{2,3})].$$

Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, $i = 1, 2$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.

Relations d'échange : classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Variables d'amas :

$$x_{2k+1} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} \dots Y_{1,2\ell-2k})] \quad (k \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2k} = [L(Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,2\ell-2k+1})] \quad (k \in \llbracket 1, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2\ell-2} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} Y_{1,2\ell-4} \dots Y_{1,4} Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,5} Y_{2,3})].$$

Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, $i = 1, 2$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.

Relations d'échange : classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.

$$x_{2\ell-2} x'_{2\ell-2} = x_{2\ell-3}^3 + \lambda_1 x_{2\ell-4}^2 x_{2\ell-3} + \lambda_2 x_{2\ell-4} x_{2\ell-3}^2 + x_{2\ell-4}^3.$$

Cas général en type A_2

Conjecture (G. (2014))

Variables d'amas :

$$x_{2k+1} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} \dots Y_{1,2\ell-2k})] \quad (k \in \llbracket 0, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2k} = [L(Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,2\ell-2k+1})] \quad (k \in \llbracket 1, \ell - 2 \rrbracket),$$

$$x_{2\ell-2} = [L(Y_{1,0} Y_{1,2\ell-2} Y_{1,2\ell-4} \dots Y_{1,4} Y_{2,2\ell-1} Y_{2,2\ell-3} \dots Y_{2,5} Y_{2,3})].$$

Coefficients : $\lambda_i = [L(\mathbf{Y}_i)]$, $i = 1, 2$, où $\mathbf{Y}_1 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{1,2r}$ et $\mathbf{Y}_2 = \prod_{r=0}^{\ell-1} Y_{2,2r+1}$.

Relations d'échange : classiques pour $x_1, \dots, x_{2\ell-3}$.

$$x_{2\ell-2} x'_{2\ell-2} = x_{2\ell-3}^3 + \lambda_1 x_{2\ell-4}^2 x_{2\ell-3} + \lambda_2 x_{2\ell-4} x_{2\ell-3}^2 + x_{2\ell-4}^3.$$

Monômes d'amas généralisés \leftrightarrow classes de modules simples.

- 1 Algèbres amassées standard et généralisées
- 2 Représentations d'algèbres lacées quantiques en type A_1
- 3 Résultats en type A_2
- 4 Questions ouvertes

La suite...

La suite...

- $A_2, \ell > 2$: algèbre \mathcal{G}_ℓ de type infini, on peut seulement espérer démontrer une inclusion des monômes d'amas dans l'ensemble des classes des modules simples $L(m)$ où m n'est pas divisible par \mathbf{Y}_i .

La suite...

- A_2 , $\ell > 2$: algèbre \mathcal{G}_ℓ de type infini, on peut seulement espérer démontrer une inclusion des monômes d'amas dans l'ensemble des classes des modules simples $L(m)$ où m n'est pas divisible par \mathbf{Y}_i .
- A_3 , $\ell = 2$: deux sous-algèbres généralisées trouvées, type infini, graines initiales très proches : seuls les indices des $\mathbf{Y}_{i,a}$ sont décalés, mais peut-on les relier par une suite de mutations ?

La suite...

- A_2 , $\ell > 2$: algèbre \mathcal{G}_ℓ de type infini, on peut seulement espérer démontrer une inclusion des monômes d'amas dans l'ensemble des classes des modules simples $L(m)$ où m n'est pas divisible par \mathbf{Y}_i .
- A_3 , $\ell = 2$: deux sous-algèbres généralisées trouvées, type infini, graines initiales très proches : seuls les indices des $\mathbf{Y}_{i,a}$ sont décalés, mais peut-on les relier par une suite de mutations ?
- Observation : la seule relation d'échange généralisée est toujours de degré h (nombre de Coxeter de \mathfrak{g}).

La suite...

- A_2 , $\ell > 2$: algèbre \mathcal{G}_ℓ de type infini, on peut seulement espérer démontrer une inclusion des monômes d'amas dans l'ensemble des classes des modules simples $L(m)$ où m n'est pas divisible par \mathbf{Y}_i .
- A_3 , $\ell = 2$: deux sous-algèbres généralisées trouvées, type infini, graines initiales très proches : seuls les indices des $\mathbf{Y}_{i,a}$ sont décalés, mais peut-on les relier par une suite de mutations ?
- Observation : la seule relation d'échange généralisée est toujours de degré h (nombre de Coxeter de \mathfrak{g}).
 → recherche de polynômes de degré 10 pour D_4 , 30 pour E_8 ... de très gros calculs !

: —)

Merci pour votre attention !