

Sous-algèbres de l'algèbre des descentes basées sur les séquences alternantes

Matthieu Josuat-Vergès

Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée

GT LIX, 11 Février 2015

Définition

On appelle séquences alternantes d'une permutation un ensemble maximal d'éléments consécutifs qui forment une suite monotone. On note $\text{run}(\sigma)$ le nombre de séquences alternantes.

Exemple

Les séquences alternantes de $\sigma = 1275436$ sont 127, 7543, 36. Donc $\text{run}(\sigma) = 3$.

Divers travaux sur l'énumération des permutations selon le nombre de séquences alternantes :

André (1881), Carlitz (1970's), Bóna & Ehrenborg (2000), Canfield & Wilf (2008), Ma (2012, 2013), Fewster & Siemssen (2014).

Le point de départ de ce travail est l'*observation* suivante : les éléments $W_k = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{run}(\sigma)=k}} \sigma$ engendrent linéairement une sous-algèbre commutative de $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$, i.e. $W_i W_j = W_j W_i = \sum c_{i,j,k} W_k$.

On appelle $\mathcal{W}$ cette algèbre. On observe aussi que $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^{n-1}$, i.e. $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Q}$ a une base linéaire $J_1, \dots, J_{n-1}$ d'idempotents orthogonaux ($J_k^2 = J_k$, $J_k J_\ell = 0$ si $k \neq \ell$).

Exemple

Pour $n = 3$, $W_1 = 123 + 321$, $W_2 = 132 + 213 + 231 + 312$.

$$W_1^2 = 2W_1, \quad W_1 W_2 = W_2 W_1 = 2W_2, \quad W_2^2 = 4W_1 + 2W_2$$

Les idempotents orthogonaux sont $\frac{1}{6}(W_1 + W_2)$, $\frac{1}{6}(2W_1 - W_2)$.

Contexte, l'algèbre des descentes

L'ensemble des *descentes* d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est

$$\text{Des}(\sigma) = \{i : \sigma(i) > \sigma(i+1)\} \subset \{1, \dots, n-1\}.$$

Pour $I \subset \{1, \dots, n-1\}$, soit $R_I = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{Des}(\sigma) = I}} \sigma$. Alors les R_I

engendrent linéairement une sous-algèbre de $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$, appelée *algèbre des descentes* [Solomon, 1976]. On l'appelle $\mathcal{D}_n$.

Par exemple avec $n = 3$, $(132 + 231)^2 = 123 + 321 + (213 + 312)$, donc $R_{\{2\}}^2 = R_{\{\}} + R_{\{1,2\}} + R_{\{1\}}$.

$\text{run}(\sigma)$ ne dépend que de $\text{Des}(\sigma)$, donc $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}_n$.

La sous-algèbre Eulérienne

Soit $\text{des}(\sigma) = \# \text{Des}(\sigma)$. Loday (1989) a démontré que les n éléments

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{des}(\sigma)=k}} \sigma$$

engendrent (linéairement) une sous-algèbre commutative de $\mathcal{D}_n$.

Ses idempotents orthogonaux ont des applications diverses en algèbre, cf. Mielnik & Plebański (1970), Feigin & Tsygan (1987), Gerstenhaber & Schack (1987), Retenauer (1986), Patras (1991).

Les algèbres pic-Eulériennes

Définition

Un *pic* d'une permutation est un entier $2 \leq i \leq n-1$ avec $\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1)$. On note $\text{pk}(\sigma)$ le nombre de pics de σ , et $\text{pk}^\circ(\sigma) = \text{pk}(\sigma) + \chi[\sigma(1) > \sigma(2)]$.

Alors les éléments $\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{pk}(\sigma)=k}} \sigma$ engendrent une sous-algèbre

commutative de $\mathcal{D}_n$, de dimension $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, qui contient une base d'idempotents orthogonaux (Schocker [2002], Petersen [2005]).

On a des résultats similaires avec pk° , à part la dimension qui est $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ (Petersen [2005], Aguiar-Nyman-Orellana [2006]).

On appelle $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\circ$ ces algèbres.

Ainsi, $\mathcal{W}$ est un nouvel exemple de type “algèbre Eulérienne”.

Par analogie avec $\mathcal{P}^\circ$ on définit aussi

$$\text{run}^\circ(\sigma) = \text{run}(\sigma) + \chi[\sigma(1) > \sigma(2)]$$

et on va montrer que les éléments $\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{run}^\circ(\sigma)=k}} \sigma$ engendrent une sous-algèbre commutative de $\mathcal{D}_n$, de dimension n , qui contient une base d'idempotents orthogonaux. On l'appelle $\mathcal{W}^\circ$.

L'algèbre des runs

On note $W_k^+ = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{run}(\sigma)=k \\ \sigma(1) < \sigma(2)}} \sigma$ et $W_k^- = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{run}(\sigma)=k \\ \sigma(1) > \sigma(2)}} \sigma$.

Théorème

Les éléments W_k^+ et W_k^- ($1 \leq k \leq n-1$) engendrent linéairement une sous-algèbre de $\mathcal{D}_n$, notée $\mathcal{W}^\pm$.

Elle n'est pas commutative, par exemple si $n = 3$,
 $W_2^+ W_2^- \neq W_2^- W_2^+$.

Elle contient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\circ$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}^\circ$.

L'algèbre des runs

$\mathcal{W}^\pm$ contient $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}^\circ$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\circ$, car :

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{run}(\sigma)=k}} \sigma = W_k^+ + W_k^-,$$

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{run}^\circ(\sigma)=k}} \sigma = W_{k-1}^- + W_k^+,$$

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{pk}(\sigma)=k}} \sigma = W_{2k}^+ + W_{2k+1}^+ + W_{2k+1}^- + W_{2k+2}^-,$$

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \text{pk}^\circ(\sigma)=k}} \sigma = W_{2k-1}^- + W_{2k}^+ + W_{2k}^- + W_{2k+1}^+.$$

La preuve

On montre $W_i^+ W_j^+ \in \mathcal{W}^\pm$, les autres cas s'en déduisent en utilisant $\omega = W_1^- = n...321$, par exemple $W_i^- = \omega W_i^+$, $W_i^\pm \omega = W_i^\pm$ si i pair, $W_i^\pm \omega = W_i^\mp$ si i impair.

Soit σ et τ avec $\text{run}(\sigma) = \text{run}(\tau)$, commençant tous les deux par une montée (ou une descente). Il suffit de donner une bijection entre

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = \sigma, \alpha \in W_i^+, \beta \in W_j^+\}$$

et

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = \tau, \alpha \in W_i^+, \beta \in W_j^+\}.$$

Lemme

Les permutations apparaissant dans W_k^+ (ou W_k^-) forment un ensemble connexe dans le permutoèdre gauche.

Démonstration.

Cet ensemble est une réunion de classes de descentes, et chaque classe de descente est connexe (c'est un intervalle).

Les classes de descentes qui apparaissent sont de la forme

$[a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_j, b_j]$ où $a_1 > 1$, $a_{i+1} - b_i > 1$, $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
 $b_j = n - 1$ ssi k pair.

Elles forment un ensemble connexe dans l'ensemble des parties de $[1, \dots, n - 1]$ (vu comme l'hypercube ou le treillis booléen). $\square$

Donc on peut se ramener au cas où $\tau = s_i \sigma$ où $s_i = (i \ i + 1)$.

Il s'agit donc de donner une bijection Φ entre

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = \sigma, \alpha \in W_i^+, \beta \in W_j^+\}$$

et

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = s_i\sigma, \alpha \in W_i^+, \beta \in W_j^+\}.$$

Premier cas : si $s_i\alpha \in W_i^+$, on définit $\Phi(\alpha, \beta) = (s_i\alpha, \beta)$.

Autrement, i et $i + 1$ sont voisins dans α , donc $\exists g, s_i\alpha = \alpha s_g$.

Deuxième cas : si $s_g\beta \in W_j^+$, on définit $\Phi(\alpha, \beta) = (\alpha, s_g\beta)$.

Autrement, g et $g + 1$ sont voisins dans β , donc $\exists h, s_g\beta = \beta s_h$.

Lemme : $2 \leq h \leq n - 2$ (car σ et $s_i\sigma = \sigma s_h$ ont le même nombre de runs)

Lemme : $2 \leq g \leq n - 2$ (si $g = 1$ par exemple, β et $s_g\beta$ serait de la forme $u12v$ et $u21v$ avec u, v non vides, cela contredit $\beta \in W_j^+, s_g\beta \notin W_j^+$).

Lemme : soit $\alpha(g-1) < i$ et $\alpha(g+2) > i+1$, soit $\alpha(g-1) > i+1$ et $\alpha(g+2) < i$ (car $s_i\alpha \notin \mathcal{W}_j^+$).

Lemme : soit $\beta(h-1) < g$ et $\beta(h+2) > g+1$, soit $\beta(h-1) > g+1$ et $\beta(h+2) < g$ (car $s_g\beta \notin \mathcal{W}_k^+$).

Lemme : soit $\alpha(\beta(h-1)) < i$ et $\alpha(\beta(h+2)) < i$, soit $\alpha(\beta(h-1)) > i+1$ et $\alpha(\beta(h+2)) > i+1$.
(car $\text{run}(\sigma) = \text{run}(s_i\sigma)$).

On suppose pour simplifier qu'on est dans le cas $\alpha(g-1) < i$, $\alpha(g+2) > i+1$, $\beta(h-1) < g$ et $\beta(h+2) > g+1$, $\alpha(\beta(h-1)) < i$ et $\alpha(\beta(h+2)) < i$. On suppose aussi pour simplifier $\alpha(g) = i$, $\alpha(g+1) = i+1$, $\beta(h) = g$, $\beta(h+1) = g+1$.

On écrit $\alpha = ui(i+1)vw$, où v contient des valeurs $> i+1$, w commence par une valeur $< i$. On définit $\Phi(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ où $\alpha' = uv(i+1)iw$, et $\beta'(h) = g + |v|$, $\beta'(h+1) = g+1 + |v|$, $\beta'(x) = \beta(x-2)$ si x est la position d'une lettre de v , $\beta'(x) = \beta(x)$ sinon.

Et dans les autres cas ?

On cherche deux indices $x \in \{g - 1, g + 2\}$ et $y \in \{\beta(h - 1), \beta(h + 2)\}$ tels que :

- ▶ x et y sont tous les deux $< g$ ou tous les deux $> g + 1$,
- ▶ parmi $\alpha(x)$ et $\alpha(y)$, un est $< i$ et l'autre $> i + 1$.

Les lemmes impliquent que x et y sont définis de manière unique. Si x, y sont $< g$, on échange $i (i + 1)$ ou $(i + 1) i$ avec un bloc sur sa gauche, sinon avec un bloc sur sa droite.

La bijection inverse est exactement la même, en échangeant les rôles de σ et τ .

Sachant que $\mathcal{W}^\pm$ est une algèbre, on en déduit que $\mathcal{W}$ aussi, plus précisément $\mathcal{W}$ est l'idéal $W_1\mathcal{W}^\pm$ car

$$W_1 W_j^+ = W_j, \quad W_1 W_j^- = W_j.$$

On montre que $\mathcal{W}^\circ$ est une algèbre en adaptant la bijection précédente (ici aussi les permutations de $W_k^+ + W_{k-1}^-$ forment un ensemble connexe). On aimerait trouver une propriété simple $P(x)$ telle que $\mathcal{W}^\circ = \{x \in \mathcal{W}^\pm : P(x)\}!$

Les algèbres pic-Eulériennes apparaissent naturellement :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\circ &= \{x \in \mathcal{W}^\circ : \omega x = x\omega\}, \\ \mathcal{P} &= \{x \in \omega \mathcal{W}^\circ \omega : x = x\omega\}. \end{aligned}$$

La commutativité de $\mathcal{W}$

$W_i W_j = W_j W_i$ pourrait se prouver par une bijection entre

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = \sigma, \text{run}(\alpha) = i, \text{run}(\beta) = j\}$$

et

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha\beta = \sigma, \text{run}(\alpha) = j, \text{run}(\beta) = i\}.$$

Mais c'est un problème difficile, on va prouver ce résultat algébriquement.

Soit Sym l'algèbre des fonctions symétriques, et Sym_n sa composante homogène de degré n .

Sym_n est une algèbre commutative pour le produit interne $*$ défini par

$$p_\lambda * p_\lambda = z_\lambda p_\lambda, \quad p_\lambda * p_\mu = 0 \text{ si } \lambda \neq \mu$$

où $z_\lambda = \prod_i i^{m_i} m_i!$, m_i étant la multiplicité de i dans λ .

Proposition

Il existe un morphisme $\Gamma : \mathcal{D}_n \rightarrow Sym_n$ défini par

$$\Gamma(R_I) = s_{\lambda/\mu},$$

la fonction de Schur gauche où λ/μ est un ruban défini ainsi : si $I = \{i_1, i_2, i_3 \dots\}$, alors $\lambda = (\dots, i_3 - 2, i_2 - 1, i_1)$.

Cela peut s'interpréter en identifiant $\mathcal{D}_n$ avec la composante homogène de degré n des fonctions symétriques non commutatives.

(La définition “naturelle” de Γ est la suivante. $NCSym$ est l’algèbre librement engendrée par $S_1, S_2, \dots$ où $\deg S_i = i$, et on a un morphisme $\Gamma : NCSym \rightarrow Sym$ avec $\Gamma(S_i) = h_i$.

C’est aussi un morphisme d’algèbre de Hopf où les coproduits sont définis par $\Delta(S_i) = \sum_{j=0}^i S_j \otimes S_{i-j}$, $\Delta(h_i) = \sum_{j=0}^i h_j \otimes h_{i-j}$.

Le produit interne $*$ sur $NCSym_n$ (resp. Sym_n) est défini de manière unique par : S_i (resp. h_i) est le neutre, et on a une compatibilité avec la structure de Hopf :

$$(ab) * c = \sum (a * c_1)(b * c_2) \text{ si } \Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Et $(NCSym_n, *)$ est anti-isomorphe à l’algèbre des descentes $\mathcal{D}_n$.)

Proposition

Γ réalise un isomorphisme de $\mathcal{W}$ vers $\Gamma(\mathcal{W})$. En particulier, $\mathcal{W}$ est commutative.

Idem pour $\mathcal{W}^\circ$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\circ$.

C'est une conséquence du résultat suivant :

Proposition

Le noyau de $\Gamma : \mathcal{W}^\pm \rightarrow \Gamma(\mathcal{W}^\pm)$ est engendré par les éléments $W_{2k}^+ - W_{2k}^-$ ($1 \leq k < n/2$).

Démonstration.

Il contient ces éléments car $\Gamma(W_{2k}^-) = \Gamma(\omega W_{2k}^+ \omega) = \Gamma(W_{2k}^+)$. Sa dimension est donc au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Il reste seulement à montrer que la dimension de l'image est $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 1$, la somme devant faire $2n - 2$. □

Proposition

Une sous-algèbre de Sym_n a une base constituée d'éléments

$\sum_{\lambda \in X_1} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \sum_{\lambda \in X_2} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \dots$ où $X_1, X_2, \dots$ sont des ensembles deux à deux disjoints de partitions de n .

Proposition

Dans le cas de $\Gamma(\mathcal{W}^\pm)$, on trouve les éléments :

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda)=0}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \quad \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda) \text{ impair}}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \quad \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda) > 0 \text{ pair}}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda.$$

où $\ell_o(\lambda)$ (resp. $\ell_e(\lambda)$) est le nombre de parts impaires (resp. paires) de λ .

$$\text{Donc } \dim(\Gamma(\mathcal{W}^\pm)) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor - 1.$$

Démonstration.

Pour déterminer cette base, il suffit de calculer $\langle \Gamma(x) | p_\lambda \rangle$ pour suffisamment d'éléments $x \in \mathcal{W}^\pm$. Par exemple :

$$\begin{aligned}\langle \Gamma(W_1^-) | p_\lambda \rangle &= (-1)^{\ell_e(\lambda)}, \\ \langle \Gamma(W_1 + W_2^-) | p_\lambda \rangle &= \begin{cases} 0 & \text{si } \ell_e(\lambda) > 0, \\ 2^{\ell(\lambda)-1} & \text{si } \ell_e(\lambda) = 0, \end{cases} \\ \langle \Gamma(W_1^- + W_2 + W_3^+) | p_\lambda \rangle &= \frac{3^{\ell_o(\lambda)} - 2n - 1}{4}.\end{aligned}$$

(Cela se prouve en calculant les séries génératrices des fonctions symétriques $\Gamma(\dots)$). □

Les idempotents

On peut en déduire facilement les idempotents des autres algèbres :

► Pour $\Gamma(\mathcal{W})$: $\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda)=0}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \quad \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda)>0 \text{ pair}}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda.$

► Pour $\Gamma(\mathcal{W}^\circ)$: $\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda)=0}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda, \quad \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda)>0}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda.$

► Pour $\Gamma(\mathcal{P})$: $\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k, \\ \ell_e(\lambda)=0}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda,$

► Pour $\Gamma(\mathcal{P}^\circ)$: $\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell_o(\lambda)=k}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda.$

Mais on n'en déduit pas immédiatement les idempotents de $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}^\circ$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\circ \dots$

Et après ?

- ▶ Le nombre de séquences alternantes a une définition qui se généralise aux groupes de Coxeter finis. On observe que les résultats sur $\mathcal{W}$ (existence de la sous-algèbre commutative et des idempotents orthogonaux) sont vrais pour B_n et D_n mais pas pour les groupes exceptionnels.
- ▶ La sous-algèbre Eulérienne a une application probabiliste : elle permet de dire combien de fois il faut battre un jeu cartes pour qu'il soit bien mélangé (la réponse est 7). Peut-on utiliser les autres sous-algèbres pour des problèmes similaires ?

Merci de votre attention