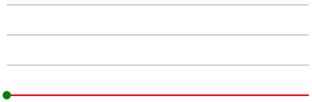
Lois limites d'algorithmes de rejet anticipé

Axel Bacher Andrea Sportiello

22 octobre 2014

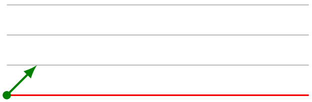
Sommaire

Algorithme florentin



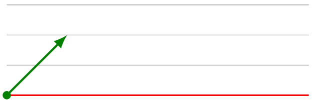
- L’algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



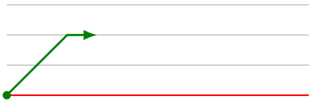
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



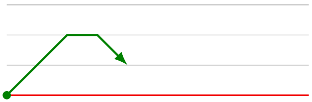
- L’algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



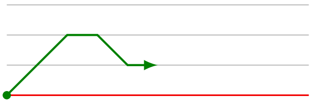
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



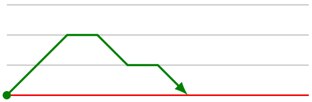
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



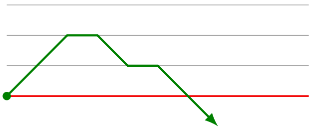
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



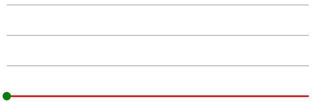
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



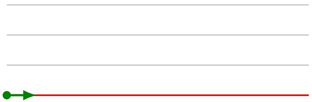
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



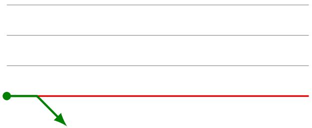
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



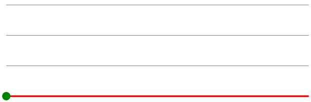
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



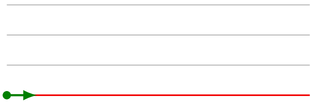
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
[Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



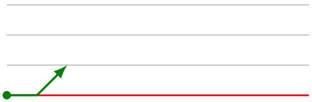
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



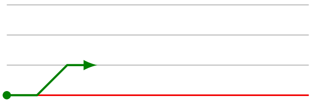
- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

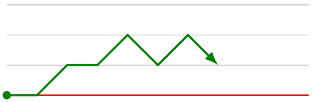
Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin



- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé.
  [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]

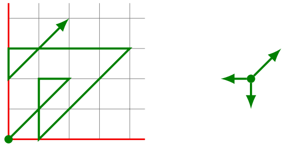
Algorithme florentin

- L'algorithme engendre des préfixes de Motzkin par rejet anticipé. [Barcucci, Pinzani, Sprugnoli 1994, 1995]
- En moyenne, $\sim \sqrt{\pi N/3}$ essais ratés de coût $\sim \sqrt{3N/\pi}$.
- Espérance et variance de la complexité:

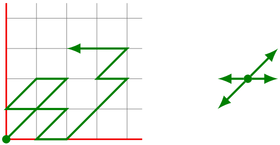
$$\mathbb{E} \sim 2N, \qquad \mathbb{V} \sim \frac{4}{3}N^2.$$

- Existence d'une loi limite. [Louchard 1999]

Chemins de Kreweras et de Gessel



- Nombre d'essais $\sim cN^{3/4}$.
- Coût d'un essai $\sim 3c^{-1}N^{1/4}$.
- Complexité $\sim 4N$.



- Nombre d'essais $\sim cN^{2/3}$.
- Coût d'un essai $\sim 2c^{-1}N^{1/3}$.
- Complexité $\sim 3N$.

[Bousquet-Mélou 2005, Bostan, Kauers 2010...]

Loi limite de l'algorithme de rejet anticipé

Théorème

Supposons que la probabilité de survie après N pas vérifie:

$$s(N) \sim cN^{-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Le coût des essais ratés est linéaire et admet une loi limite de transformée de Laplace:

$$\phi(z) = \frac{z^{-\alpha}}{-\alpha\gamma(-\alpha, z)}, \qquad \gamma(s, z) = \int_0^z x^{s-1} e^{-x} dx.$$

- Cette loi est la loi de Darling-Mandelbrot. [Darling 1952, Lew 1994]
- Si $\alpha \geqslant 1$, l'algorithme est surlinéaire de loi limite exponentielle.

Idée de la preuve

- Le nombre d'essais ratés étant géométriquement distribué, on a:

$$\phi_N(z) = \frac{s(N)}{1 - \psi_N(z)},$$

  où $\psi_N(z)$ est la transformée d'un essai raté.

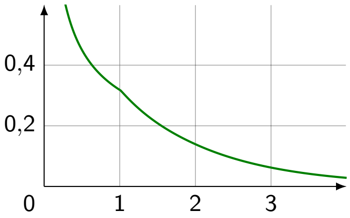
- La transformée (=série exponentielle alternée des moments) $\psi_N(z)$ vaut:

$$\psi_N(z) \sim 1 - s(N) + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha}{n - \alpha} c N^{n-\alpha} \frac{(-z)^n}{n!}.$$

- On en déduit:

$$\phi_N(z/N) \xrightarrow[N \to \infty]{} \left(1 - \sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha}{n - \alpha} \frac{(-z)^n}{n!}\right)^{-1}.$$

Forme de la densité



- La densité prend la forme:

$$g(x) = \sum_{k \geqslant 0} g_k(x),$$

où $g_k(x)$ est définie et analytique pour $x > k$.

- Tous les entiers sont des singularités de $g(x)$.

Expressions de la densité

Théorème

1. *Les fonctions g_k sont définies par un produit de convolution:*

$$g_k(x) = a * \underbrace{b * \cdots * b}_{k \text{ facteurs}}(x),$$

avec:

$$a(x) = C_0 x^{\alpha - 1}, \qquad b(x) = -C_0 \frac{(x-1)^\alpha}{x} \mathbf{1}_{x>1}.$$

2. *Leur développement en série entière en $x = k$ vaut:*

$$g_k(x) = C_k (x-k)^{\beta_k} \sum_{n_1,\ldots,n_k \geqslant 0} \frac{(1+\alpha)_{n_1} \cdots (1+\alpha)_{n_k}}{(1+\beta_k)_{n_1+\cdots+n_k}} (k-x)^{n_1+\cdots+n_k},$$

où:

$$\beta_k = \alpha - 1 + k(1+\alpha).$$

Idée de la preuve

- On calcule la transformée de Laplace de $g(x)$ en utilisant le fait que $\gamma(-\alpha, z) = \Gamma(-\alpha) - \Gamma(-\alpha, z)$:

$$\phi(z) = \frac{z^{-\alpha}}{-\alpha\gamma(-\alpha, z)} = \frac{A(z)}{1 - B(z)},$$

avec:

$$A(z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \qquad B(z) = \frac{\Gamma(-\alpha, z)}{\Gamma(-\alpha)}.$$

- On effectue une transformée inverse.

Équations différentielles

Théorème

1. *La densité $g(x)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire:*

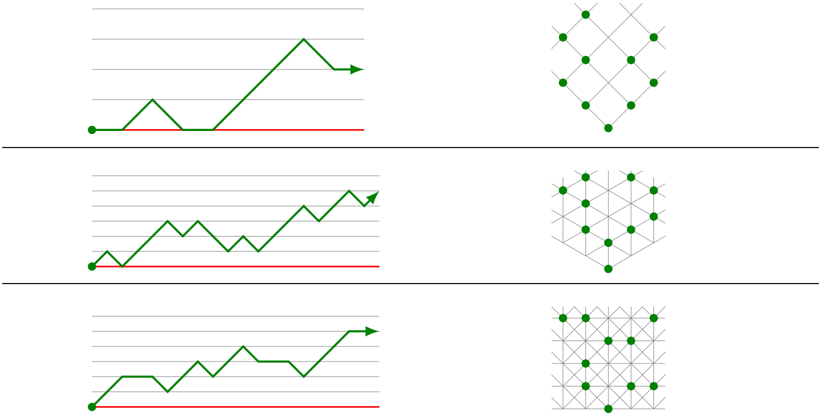
$$(1-\alpha)g(x) + xg'(x) = -\alpha\, g * g(x-1).$$

2. *Soit D_k et E_k les opérateurs différentiels linéaires:*

$$D_k = (x-k)\frac{d}{dx} + 1 - (k+1)\alpha, \qquad E_k = D_k \cdots D_0.$$

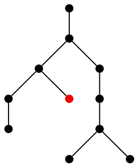
L'opérateur E_k annule les fonctions $g_0, \dots, g_k$.

Animaux dirigés



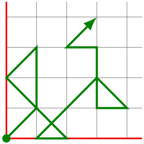
- Bijections entre préfixes de Motzkin/Dyck/Schröder et animaux dirigés sur réseau carré/triangulaire/du roi. [Gouyou-Beauchamps 1988, Bétréma, Penaud 1991, B. 2014]
- Dans les trois cas, le théorème s'applique avec $\alpha = 1/2$.

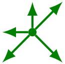
Arbres unaires-binaires



- L'algorithme engendre des arbres unaires-binaires pointés.
- À chaque étape, il effectue une greffe et un repointage.
- Le repointage peut échouer, d'où un rejet anticipé.
- La probabilité de survie satisfait $s(N) \sim cN^{-1/2}$.
  [B., Bodini, Jacquot 2014]

Autres marches aléatoires





Autres modèles avec $s(N) \sim cN^{-\alpha}$:

- marches dans le quart de plan;
- marches dans un secteur angulaire;
- *vicious walkers*;
- ...