Algebraic *Analytic Urns*

Basile Morcrette

Séminaire Combinatoire du LIX
19 Novembre 2012

Plan

1. Urnes de Pólya et combinatoire analytique

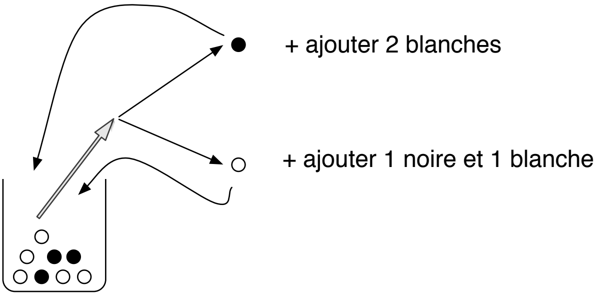
2. Recherche automatique : Guess'n'Prove

3. Algébricité, classification

4. Analyse asymptotique

$\boxed{\text{Urnes de Pólya et combinatoire analytique}}$

Urnes de Pólya



- Une urne contenant des boules de deux couleurs différentes
- Des règles fixées pour l'évolution de l'urne

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Urnes de Pólya équilibrées additives

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, d \in \mathbb{N}, \qquad b, c \in \mathbb{N}$$

Urne équilibrée : $\boxed{a + b = c + d}$ (nombre total de boules déterministe)

Configuration initiale fixée (a_0, b_0) : a_0 boules $\bullet$ (comptées par x)

b_0 boules $\circ$ (comptées par y)

Définition

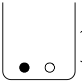
Histoire de longueur n : une suite de n évolutions (n tirages)

$$H(x, y, z) = \sum_{n,i,j} H_{n,i,j}\, x^i y^j \frac{z^n}{n!}$$

$H_{n,i,j}$: nombre d'histoires de longueur n, débutant en (a_0, b_0), et terminant en (i, j).

Compter les histoires - Exemple

Prenons l'urne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(a_0, b_0) = (1, 1)$.

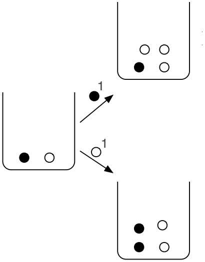


$$H(x, y, z) =$$

$$xy$$

Compter les histoires - Exemple

Prenons l'urne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(a_0, b_0) = (1, 1)$.



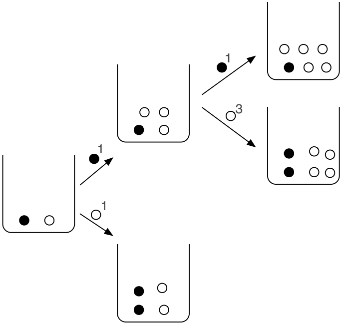
$$H(x, y, z) =$$

$$xy$$

$$+ \quad (xy^3 + x^2y^2)\,\frac{z}{1!}$$

Compter les histoires - Exemple

Prenons l'urne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(a_0, b_0) = (1, 1)$.



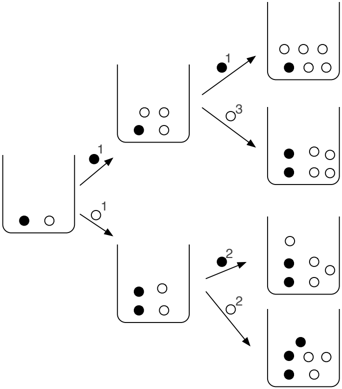
$$H(x, y, z) =$$

$$xy$$

$$+ \quad (xy^3 + x^2y^2)\,\frac{z}{1!}$$

Compter les histoires - Exemple

Prenons l'urne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(a_0, b_0) = (1, 1)$.



$$H(x, y, z) =$$

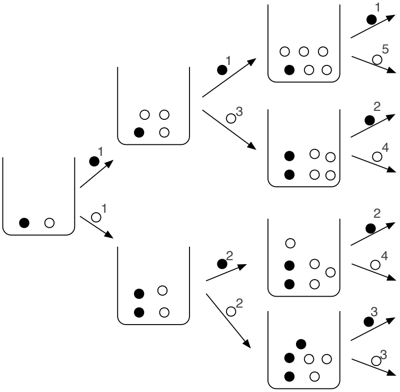
$$xy$$

$$+ \quad (xy^3 + x^2y^2)\frac{z}{1!}$$

$$+ \quad (xy^5 + 5x^2y^4 + 2x^3y^3)\frac{z^2}{2!}$$

Compter les histoires - Exemple

Prenons l'urne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(a_0, b_0) = (1, 1)$.



$$H(x,y,z) =$$

$$xy$$

$$+ \quad (xy^3 + x^2y^2)\,\frac{z}{1!}$$

$$+ \quad (xy^5 + 5x^2y^4 + 2x^3y^3)\,\frac{z^2}{2!}$$

$$+ \quad \dots$$

Propriétés analytiques

Équation aux Dérivées Partielles [FlGaPe05]

$$\partial_z H = x^{a+1} y^b \, \partial_x H + x^c y^{d+1} \, \partial_y H \, .$$

Isomorphisme [FlDuPu06]

$$\text{Urne } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} (a_0, b_0) \\ a+b=c+d \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} H = X^{a_0} \, Y^{b_0} \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & X^{a+1} \, Y^b \\ \dot{Y} & = & X^c \, Y^{d+1} \end{array} \right. \end{array}$$

Intégrale première pour les urnes équilibrées [FlDuPu06]

Soit $p := c - a = b - d$,

$$X^p - Y^p = x^p - y^p$$

Preuve de l'isomorphisme

Différencier = Piocher

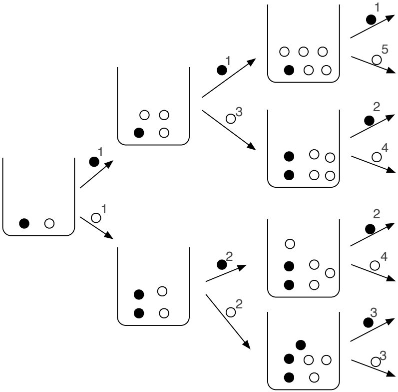
$$\partial_x[xx\ldots x] = (\cancel{x}x\ldots x) + (x\cancel{x}\ldots x) + \ldots + (xx\ldots \cancel{x})$$
$$x\partial_x[xx\ldots x] = (\underline{x}x\ldots x) + (x\underline{x}\ldots x) + \ldots + (xx\ldots \underline{x})$$

Posons $\mathfrak{D} = x^{a+1}y^b\partial_x + x^c y^{d+1}\partial_y$
Alors

$$\boxed{\mathfrak{D}[x^i y^j] = ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}}$$

Compter les histoires - Exemple

Prenons l'urne $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $(a_0, b_0) = (1, 1)$.



$$H(x,y,z) =$$

$$xy$$

$$+ \quad (xy^3 + x^2y^2)\,\frac{z^1}{1!}$$

$$+ \quad (xy^5 + 5x^2y^4 + 2x^3y^3)\frac{z^2}{2!}$$

$$+ \quad \dots$$

Preuve de l'isomorphisme

Différencier = Piocher

$$\partial_x[xx\dots x] = (\cancel{x}x\dots x) + (x\cancel{x}\dots x) + \dots + (xx\dots\cancel{x})$$

$$x\partial_x[xx\dots x] = (\underline{x}x\dots x) + (x\underline{x}\dots x) + \dots + (xx\dots\underline{x})$$

Posons $\mathfrak{D} = x^{a+1}y^b\partial_x + x^c y^{d+1}\partial_y$

Alors $\boxed{\mathfrak{D}[x^i y^j] = ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}}$

$$\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}] = \sum_{i,j} H_{n,i,j}x^i y^j$$

$$H(x,y,z) = \sum_{n\geq 0}\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}]\frac{z^n}{n!}$$

Preuve de l'EDP

$$H = \left(e^{\mathfrak{D}z}\right)\circ[x^{a_0}y^{b_0}], \quad \text{et ainsi,} \quad \partial_z H = \mathfrak{D}H\,.$$

Preuve de l'isomorphisme

Différencier = Piocher

$x\partial_x[xx\ldots x] = (\underline{x}x\ldots x)+(x\underline{x}\ldots x)+\ldots+(xx\ldots \underline{x})$

$\mathfrak{D} = x^{a+1}y^b\partial_x + x^c y^{d+1}\partial_y$

$$\boxed{\mathfrak{D}[x^i y^j] = ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}}$$

$$\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}] = \sum_{i,j} H_{n,i,j}x^i y^j$$

$$H(x,y,z) = \sum_{n\geq 0} \mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}]\frac{z^n}{n!}$$

Soit $(X(t), Y(t))$ solution de

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{a+1}Y^b & X(t=0)=x \\ \dot{Y} = X^c Y^{d+1} & Y(t=0)=y \end{cases}$$

Preuve de l'isomorphisme

Différencier = Piocher

$x\partial_x[xx\ldots x] = (\underline{x}x\ldots x)+(x\underline{x}\ldots x)+\ldots+(xx\ldots\underline{x})$

$\mathfrak{D} = x^{a+1}y^b\partial_x + x^c y^{d+1}\partial_y$

$$\boxed{\mathfrak{D}[x^i y^j] = ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}}$$

$$\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}] = \sum_{i,j} H_{n,i,j}x^i y^j$$

$$H(x,y,z) = \sum_{n\geq 0}\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}]\frac{z^n}{n!}$$

Soit $(X(t), Y(t))$ solution de

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{a+1}Y^b & X(t=0)=x \\ \dot{Y} = X^c Y^{d+1} & Y(t=0)=y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(X^i Y^j) \\ = \quad & iX^{i-1}\dot{X}Y^j + jX^iY^{j-1}\dot{Y} \\ = \quad & \boxed{iX^{+a}Y^{j+b} + jX^{i+c}Y^{j+d}} \end{aligned}$$

Preuve de l'isomorphisme

Différencier = Piocher

$x\partial_x[xx\dots x] = (\underline{x}x\dots x)+(x\underline{x}\dots x)+\dots+(xx\dots \underline{x})$

$\mathfrak{D} = x^{a+1}y^b\partial_x + x^c y^{d+1}\partial_y$

$$\boxed{\mathfrak{D}[x^i y^j] = ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}}$$

$$\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}] = \sum_{i,j} H_{n,i,j}x^i y^j$$

$$H(x,y,z) = \sum_{n\geq 0} \mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}]\frac{z^n}{n!}$$

Soit $(X(t), Y(t))$ solution de

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{a+1}Y^b & X(t=0) = x \\ \dot{Y} = X^c Y^{d+1} & Y(t=0) = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\partial_t(X^i Y^j) \\ = \quad & iX^{i-1}\dot{X}Y^j + jX^i Y^{j-1}\dot{Y} \\ = \quad & \boxed{iX^{+a}Y^{j+b} + jX^{i+c}Y^{j+d}} \end{aligned}$$

$$\partial_t^n(X^i Y^j) = \mathfrak{D}^n\left[x^i y^j\right]_{\substack{x\to X\\ y\to Y}}$$

Preuve de l'isomorphisme

Différencier = Piocher

$$x\partial_x[xx\ldots x] = (\underline{x}x\ldots x)+(x\underline{x}\ldots x)+\ldots+(xx\ldots \underline{x})$$

$$\mathfrak{D} = x^{a+1}y^b\partial_x + x^c y^{d+1}\partial_y$$

$$\boxed{\mathfrak{D}[x^i y^j] = ix^{i+a}y^{j+b} + jx^{i+c}y^{j+d}}$$

$$\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}] = \sum_{i,j} H_{n,i,j}x^i y^j$$

$$H(x,y,z) = \sum_{n\geq 0}\mathfrak{D}^n[x^{a_0}y^{b_0}]\frac{z^n}{n!}$$

Soit $(X(t), Y(t))$ solution de

$$\begin{cases} \dot{X} = X^{a+1}Y^b & X(t=0) = x \\ \dot{Y} = X^c Y^{d+1} & Y(t=0) = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\partial_t(X^i Y^j) \\ = \quad & iX^{i-1}\dot{X}Y^j + jX^iY^{j-1}\dot{Y} \\ = \quad & \boxed{iX^{+a}Y^{j+b} + jX^{i+c}Y^{j+d}} \end{aligned}$$

$$\partial_t^n(X^iY^j) = \mathfrak{D}^n\left[x^iy^j\right]\begin{matrix} x \to X \\ y \to Y\end{matrix}$$

$$H(X(t),Y(t),z) = \sum_{n\geq 0}\partial_t^n\left[X(t)^{a_0}Y(t)^{b_0}\right]\frac{z^n}{n!} = X(t+z)^{a_0}Y(t+z)^{b_0}$$

Enfin $t=0$, et c'est gagné ! !

Des marches vers les urnes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad a, b, c, d \geq 0\,.$$

Dans la configuration (i, j) (i noires, et j blanches), il y a deux pas possibles :

- aller en $(i + a, j + b)$, avec probabilité $i/(i + j)$;
- aller en $(i + c, j + d)$, avec probabilité $j/(i + j)$.

suite de n tirages = marche pondérée dans le quart de plan.

$$H(x, y, z) = \sum_{n,i,j} H_{n,i,j}\, x^i y^j \frac{z^n}{n!}$$

Dans le cas classique des marches aléatoires dans le quart de plan, question de nature (rationelle, algébrique, holonome, non holonome ?) [Bousquet-Mélou&Mishna08] [Bostan&Kauers09,10] [Raschel&Fayolle12]

Problème d'Algebricité

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Quand $H(x, y, z)$ est algébrique ?

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Problème d'Algebricité

$$\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&5\\4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5&2\\2&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&3\\2&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&5\\0&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$$

Quand $H(x, y, z)$ est algébrique ?

$$\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&5\\2&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&3\\4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}6&2\\3&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}4&1\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&5\\6&2\end{pmatrix}$$

2. $\boxed{\text{Recherche et preuve automatique}}$

Les urnes avec zéros

Ne sont pas algébriques :

- l'urne $[0, 0, 0, 0]$, $\qquad H(x, y, z) = x^{a_0} y^{b_0} e^{(a_0+b_0)z}$.
- les urnes de type Friedman $[0, \sigma, \sigma, 0]$,
- les urnes anti-triangulaires $[0, \sigma, p, \sigma - p]$.

Sont algébriques :

- les urnes de type Pólya $[\sigma, 0, 0, \sigma]$,

$$H(x, y, z) = x^{a_0} y^{b_0} (1 - \sigma x^{\sigma} z)^{-a_0/\sigma} (1 - \sigma y^{\sigma} z)^{-b_0/\sigma} ,$$

- les urnes des records $[\sigma, 0, \sigma, 0]$,

$$H(x, y, z) = x^{a_0} y^{b_0} (1 - \sigma x^{\sigma} z)^{-s_0/\sigma} ,$$

- les urnes triangulaires $[\sigma, 0, \sigma + p, -p]$,

$$H(x, 1, z) = x^{a_0} (1 - \sigma z)^{-b_0/\sigma} \left(1 - x^{a} \left(1 - (1 - \sigma z)^{a/\sigma}\right)\right)^{-a_0/a} .$$

Préliminaires à l'automatisation

1. Il suffit d'étudier $H(x, 1, z)$.

   La condition d'équilibre rend une variable redondante.

2. Il suffit de traiter le cas initial à une boule blanche $(a_0, b_0) = (0, 1)$.

   L'intégrale première, $X^p - Y^p = x^p - y^p$, lie algébriquement X et Y.
   L'équation, $H = X^{a_0} Y^{b_0}$, lie algébriquement H, X et Y.

3. Les urnes $[a, b, c, d]$ et $[d, c, b, a]$ ont le même comportement.

   Inversion des couleurs, blanche et noire.

4. Il suffit de considérer les cas avec coefficients premiers entre eux.

   Si $\delta = \mathrm{pgcd}(a, b, c, d)$, nous étudions $[a/\delta,\ b/\delta,\ c/\delta,\ d/\delta]$.

1. Développement en série (à précision 150)

2. Deviner une équation algébrique

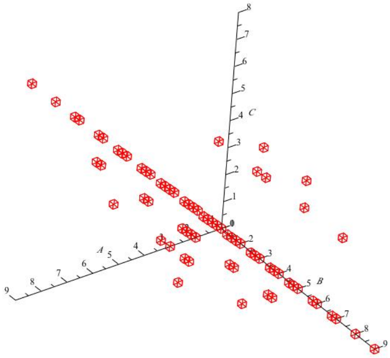
3. Preuve assistée par ordinateur

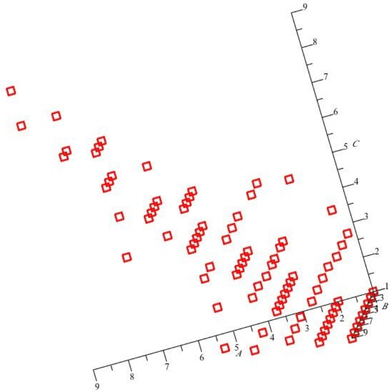
Code Maple

```
                %%% INITIALIZATION %%%
with(gfun):
precision := 150; balancemax := 10; CondInit := y;

                %%% CONSTRUCTION DE LA SERIE TRONQUEE %%%
Dop := proc(f,a,b,c,d)
expand( x^(1+a) * y^(b) * diff(f,x) + x^(c) * y^(1+d) * diff(f,y) ); end:

SerieCons := proc(n,init,a,b,c,d) local res, iter, i;
res := init; iter := init;
for i from 1 to n do
    iter := 1/i * Dop(iter,a,b,c,d);
    res := res+iter*z^i;
end: end proc:

                %%% AUTOMATIC GUESS-AND-PROVE %%%
for s from 1 to balancemax do
for a from 0 to s-1 do
for d from 1 to s-1 do
    b := s - a; c := s - d;
    if gcd(gcd(gcd(a,b),c),d)=1 then

                        %%% POWER SERIE EXPANSION %%%
        zseries := series(subs(y=1, SerieCons(precision, CondInit, a, b, c, d)), z, precision):

                        %%% GUESSING %%%
         guess_poly := seriestoalgeq(zseries, h(z), [ogf]):

        if guess_poly = 'FAIL' then
            print(Matrix([[a,b], [c,d]]), guess_poly);
        else
                        %%% FORMAL PROOF %%%
            P := subs(h(z)=T, guess_poly[1]):
            psi := RootOf(P,T):
            EDP := (1-(a+b)*z*x^c) * diff(psi,z) + (x^(c+1) - x^(a+1)) * diff(psi,x) - x^c*psi;
            preuve := simplify(normal(EDP));
            print(Matrix([[a,b],[c,d]]), P, preuve);
        end if:
    end if:
end: end: end;
```

Observations

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } d = a + b - c.$$





Des alignements apparaissent :
$\{a = c\}$, $\{a = c + 1\}$, $\{a = 2c\}$, $\{a + 2 = c$ avec b et c impairs$\}$

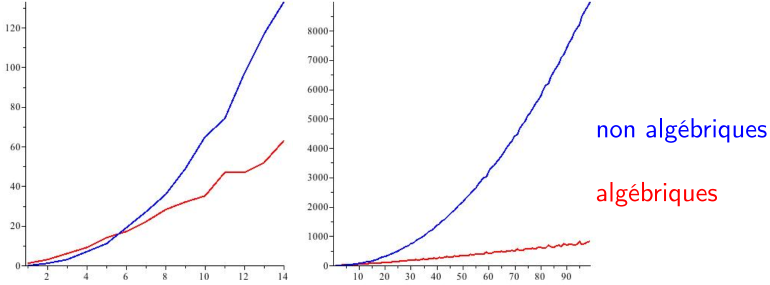
Intuitions

Si une urne $[a, b, c, d]$ est prouvée algébrique par l'algorithme, alors elle appartient à l'un des trois cas suivants :

(i) $p = 0$

(ii) $p < 0$ et $a \equiv 0\ [p]$

(iii) $p \geq 2$, $a \equiv 1\ [p]$ et $b \equiv -1\ [p]$



balance < 15 balance < 100

Et les urnes Différentiellement Finies ?

Définition Une fonction est dite <u>différentiellement finie</u> (ou holonome) si elle est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux.

Dans la recherche automatique, cela se fait de façon identique
`seriestoalgeq --> seriestodiffeq`
Les mêmes urnes ressortent...

Proposition Toutes les urnes équilibrées dont la série est différentiellement finie sont algébriques.

Idée de la preuve :
Toutes les dérivées de X et Y s'expriment comme des polynômes en X et Y, car X' et Y' sont des monômes en X et Y,

$$\{X' = X^{a+1}Y^b, Y' = X^cY^{d+1}\}.$$

3. $\boxed{\text{Algébricité, classification}}$

Preuve générale d'algébricité

Théorème : Pour une urne $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d > 0$, et $p = c - a = b - d$, si

(i) $p = 0$

(ii) $p < 0$ et $a \equiv 0\ [p]$

(iii) $p \geq 2$, $a \equiv 1\ [p]$ et $b \equiv -1\ [p]$

alors $H(x, y, z)$ est algébrique.

Paramétrisation

$$(i) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \text{ avec } a, b > 0\,;$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} kr + r & b \\ kr & b + r \end{pmatrix} \text{ avec } r, k, b \geq 1\,;$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} kr + 1 - r & r\ell - 1 + r \\ kr + 1 & r\ell - 1 \end{pmatrix} \text{ avec } k, \ell \geq 1\,, \text{et } r \geq 2\,.$$

Cas (i) : $p = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b > 0 \ .$$

$$\{X' = X^{a+1}Y^b,\ Y' = X^a Y^{b+1}, X(0) = x,\ Y(0) = y\}$$

Le polynôme $P(T, x, y, z)$ s'annule en $T = Y(x, y, z)$:

$$P(T, x, y, z) = \left(1 - \sigma x^a y^b z\right)\ T^{\sigma} - y^{\sigma}$$

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &= X(x, y, z)^{a_0} \qquad Y(x, y, z)^{b_0} \\ &= \left(\frac{x}{(1 - \sigma x^a y^b z)^{1/\sigma}}\right)^{a_0} \left(\frac{y}{(1 - \sigma x^a y^b z)^{1/\sigma}}\right)^{b_0} \end{aligned}$$

$$[z^n]H(x, y, z) = x^{a_0 + an} y^{b_0 + bn} [z^n] \frac{1}{(1 - \sigma z)^{s_0/\sigma}} = \frac{\sigma^n}{n!} \frac{\Gamma(n + s_0/\sigma)}{\Gamma(s_0/\sigma)} x^{a_0 + an} y^{b_0 + bn} \, .$$

Cas (ii) : $p < 0$ et $a \equiv 0$ $[p]$

$$\begin{pmatrix} kr + r & b \\ kr & b + r \end{pmatrix}, \text{ avec } r, k, b > 0 \; .$$

Proposition La fonction génératrice $Y = H(x, y, z)$ est solution de

$$[z - K(x, y)] Y^{r(k+1)+b} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(x^{-r} - y^{-r})^i}{r(k+1-i)+b} Y^{ir} = 0$$

Le polynôme annulateur trouvé est de degré σ.

Remarque. Pour $k = 1$, $r = a$ nous retrouvons [M. 2012, *LATIN*]

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ a & a + b \end{pmatrix}$$

Preuve

Système différentiel : $\left\{\begin{array}{lcl}\dot{X} & = & X^{kr+r+1}\,Y^{b}\\ \dot{Y} & = & X^{kr}\,Y^{b+r+1}\end{array}\right.$ $\qquad \dot{X} = \frac{\partial}{\partial z}X$

Intégrale première : $X^{-r} - Y^{-r} = x^{-r} - y^{-r}$

Ainsi, $X^{kr} = Y^{kr}\left(1 + Y^{r}(x^{-r} - y^{-r})\right)^{-k}$.

$$\frac{\dot{Y}}{Y^{rk+r+b+1}}\left((1 + Y^{r}(x^{-r} - y^{-r})\right)^{k} = 1$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x^{-r} - y^{-r})^{i}\,Y^{r(i-k-1)-b-1}\,Y' = 1\,.$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x^{-r} - y^{-r})^{i}\,\frac{Y^{-(r(k+1-i)+b)}}{-(r(k+1-i)+b)} = z - K(x,y)\,,$$

avec $K(x,y)$ constante d'intégration. Il reste à multiplier par $Y^{r(k+1)+b}$.

Cas (iii) : $p \geq 2$, $a \equiv 1$ $[p]$ et $b \equiv -1$ $[p]$

$$\begin{pmatrix} kr+1-r & r\ell-1+r \\ kr+1 & r\ell-1 \end{pmatrix}, \text{ avec } k,\ell > 0 \text{ et } r > 1 \,.$$

Proposition La fonction génératrice $Y = H(x,y,z)$ est solution de

$$\frac{Q(Y)}{(Y^r + C)^{k+1/r-1}\, Y^{r\ell-1}\, C^{\ell+k}} = z - K(x,y)$$

où Q est un polynôme de degré $r(k+\ell-1)$ et $C = x^r - y^r$.

Idée de la preuve : L'équation $Y' = (Y^r + C)^{1/r+k}\, Y^{r\ell}$ s'intègre en

$$(Y^r + C)^{1/r+k-1}\, Y^{r\ell-1}\, (z - K(x,y)) = Q(Y)\,.$$

Le polynôme annulateur trouvé est de degré
$r(rk+1-r) + r(r\ell-1) = r^2(k+\ell-1)$.

4. $\boxed{\text{Analyse asymptotique}}$

Étude asymptotique du cas (ii)

$$\begin{pmatrix} kr + r & b \\ kr & b + r \end{pmatrix}, \text{ avec } r, k, b > 0\,.$$

urnes à croissance préférentielle

$$[z - K(x)]\, Y^{r(k+1)+b} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(x^{-r} - 1)^i}{r(k+1-i)+b}\, Y^{ir} = 0$$

Généralisation du cas $k = 1$, l'urne $[2r, b, r, b + r]$, traitée dans [M.2012].

Premières observations

Balance $\sigma = (k+1)r + b$
Pour $x = 1$, l'équation devient : $(z - \sigma^{-1})Y^{\sigma} + \sigma^{-1} = 0$
Ainsi pour $(a_0, b_0) = (0, 1)$

$$H(1,1,z) = (1 - \sigma z)^{-1/\sigma} \qquad h_n \sim \frac{\sigma^n n^{1/\sigma - 1}}{\Gamma(1/\sigma)}$$

Proposition

Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules de couleur $\mathtt{x}$ dans l'urne au temps n. Alors

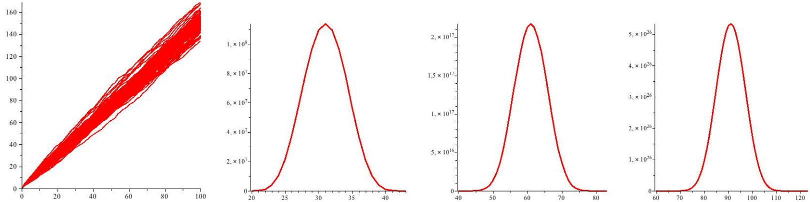
$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{rk\sigma}{rk+b} n - \frac{rk}{rk+b} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{\sigma}\right)} n^{r/\sigma} + \frac{rk}{rk+b} + O\left(n^{r/\sigma - 1}\right) .$$

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{kr^3 b\sigma}{(kr+b)^2((k-1)r+b)} n + O\left(n^{\frac{2r}{\sigma}}\right) .$$

Exemple $r = 1$, $k = 1$, $b = 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} \mathtt{x} & \rightarrow & \mathtt{x\,x\,y} \\ \mathtt{y} & \rightarrow & \mathtt{x\,y\,y} \end{array}$$

croissance préférentielle



$$\left(z - \frac{x^{-1}-1}{2} - \frac{1}{3}\right) Y^3 + \frac{x^{-1}-1}{2} Y + \frac{1}{3} = 0$$

Méthode de col pour $x = 1$

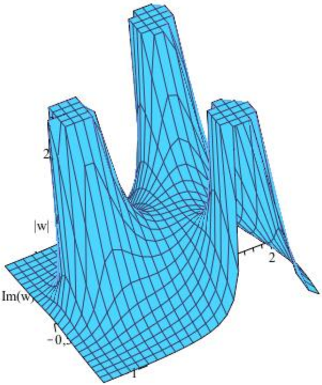
$$\left(z - \frac{1}{3}\right) Y^3 + \frac{1}{3} = 0$$

$$y_n = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{Y(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$$

$$\boxed{y_n = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint a(w) h(w)^{n+1} \mathrm{d}w}$$

$$\begin{cases} a(w) & = & 1 - w \\ h(w) & = & \dfrac{1}{w(w^2 - 3w + 3)} \end{cases}$$

$$h'(w) = \frac{-3(w-1)^2}{w^2(w^2 - 3w + 3)^2}$$



$w \mapsto |h(w)|$

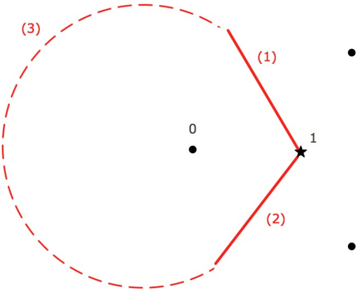
3 pôles

1 col double en $w = 1$

évaluer l'intégrale selon le bon contour...

Méthode de col x=1 (suite)

$t \in [0..L]$
(1) $w(t) = 1 + te^{i2\pi/3}$
(2) $w(t) = 1 + te^{-i2\pi/3}$



$$h(w(t))^n = \exp\left(-n(t^3 + O\left(t^6\right)\right)$$

Choisir L... $nL^3 \to \infty$ et $nL^6 \to 0$
Prenons $L \sim n^{-1/4}$

$$\int_{(1)} + \int_{(2)} : \int_0^\infty ue^{-u^3} du \quad \text{et} \quad \int_{(3)} \text{exponentiellement négligeable}$$

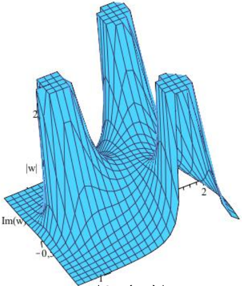
$$\boxed{y_n = \frac{3^n}{\Gamma(1/3)}\left(n^{-2/3} + O\left(n^{-11/12}\right)\right)}$$

Méthode de col $x \neq 1$

$$\left(z - \frac{x^{-1}-1}{2} - \frac{1}{3}\right) Y^3 + \frac{x^{-1}-1}{2} Y + \frac{1}{3} = 0$$

$$y_n = \frac{3^{n+1}}{2i\pi} \oint a_x(w) h_x(w)^{n+1} \mathrm{d}w$$

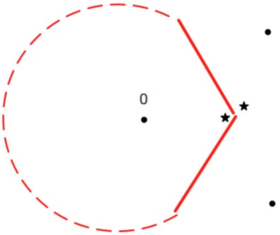
$$h_x'(1) = h'(x^{-1}) = 0$$



$w \mapsto |h_x(w)|$

3 pôles

2 cols en $w = 1$ et $w = x^{-1}$



$$x = 1 + \frac{\tilde{x}}{\sqrt{n}}, \quad |\tilde{x}| < 1$$

$$y_n(x) \sim \frac{3^n n^{-2/3}}{\Gamma(1/3)} \exp\left(\frac{3}{2}\sqrt{n}\tilde{x} - \frac{3}{8}\tilde{x}^2\right)$$

$$\boxed{p_n(x) = \frac{y_n(x)}{y_n(1)} \sim \exp\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{n}\tilde{x} - \tfrac{3}{8}\tilde{x}^2\right)}$$

Loi normale limite

Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules • dans l'urne après n étapes.

Théorème

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X_n - \frac{3}{2}n}{\sqrt{\frac{3n}{4}}} \leqslant t\right\} = \Phi(t) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

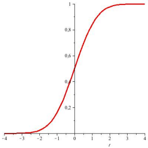
Loi locale limite

Théorème

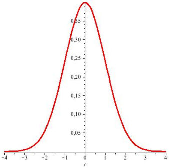
Notons $p_{n,k} = \mathbb{P}\{X_n = k\}$. La distribution des X_n satisfait une loi locale limite de type gaussienne avec vitesse de convergence $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, i.e.

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sqrt{3n}}{2} p_{n,\lfloor 3n/2 + t\sqrt{3n}/2 \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{X_n - \frac{3}{2}n}{\sqrt{\frac{3n}{4}}} \leqslant t \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$



$$\frac{\sqrt{3n}}{2}\, \mathbb{P}\left\{ X_n = \left\lfloor \frac{3n}{2} + t\frac{\sqrt{3n}}{2} \right\rfloor \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

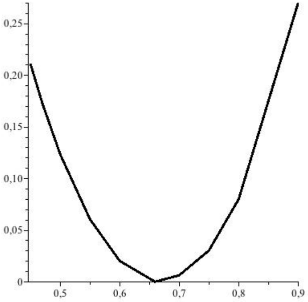


Grandes déviations

- Borne exponentiellement petite sur la grande déviation par rapport à la valeur moyenne : quantification sur les événements rares

Théorème

- si $0.42 < t < 2/3$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant tn) \approx e^{-nW(t)}$ (queue gauche)
- si $2/3 < t < 0.73$, $\mathbb{P}(X_n \geqslant tn) \approx e^{-nW(t)}$ (queue droite)

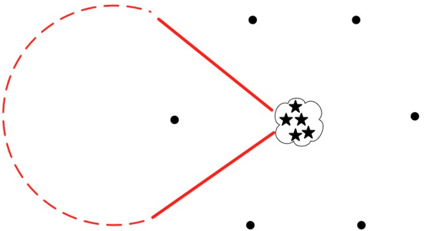


Cas général

$$[z - K(x,y)]\, Y^{r(k+1)+b} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(x^{-r} - y^{-r})^i}{r(k+1-i)+b}\, Y^{ir} = 0$$

$$y_n(x) = \frac{\sigma^{n+1}}{2i\pi} \oint a_x(w) h_x(w)^{n+1} \mathrm{d}w$$

$h_x(w)$: $\sigma = (k+1)r + b$ pôles simples
dont un en $w = 0$,
et pas de pôle en $w = 1$.
Col en 1 avec multiplicité $r + b - 1$
On a kr autres cols en les racines de $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^{-r} - 1)^i (1-w)^{(k-i)r}$.



$$x \sim 1 + O(n^{-1/2}) \text{ et } L \sim n^{-\frac{1}{\sigma+1}}$$

$$y_n(x) \sim \frac{\sigma^n n^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{\Gamma(1/\sigma)} \exp\left(\mu i u \sqrt{n} - \frac{\nu^2}{2} u^2\right)$$

$$p_n(x) \sim \exp\left(\mu i u \sqrt{n} - \nu^2/2u^2\right)$$

Résultats asymptotiques - Cas (ii)

$$\begin{pmatrix} kr+r & b \\ kr & b+r \end{pmatrix}, \text{ avec } r,k,b>0 \qquad \sigma=(k+1)r+b$$

$$\text{Moyenne} \sim \mu n \qquad \text{avec} \qquad \mu = \frac{kr\sigma}{kr+b}$$

$$\text{Variance} \sim \nu^2 n \qquad \text{avec} \qquad \nu^2 = \frac{kr^3 b\sigma}{(kr+b)^2((k-1)r+b)}$$

Pour $x = \exp\left(i\frac{u}{\sqrt{n}}\right)$, on a

$$p_n(x) = \exp\left(\mu i u\sqrt{n} - \nu^2/2u^2\right) + O(n^{-\frac{\sigma-2r-1}{2(\sigma+1)}}).$$

Théorème des Quasi-Puissances :

- loi normale limite, avec vitesse de convergence
- loi locale limite
- principe de grandes déviations

Étude asymptotique du cas (iii)

$$\begin{pmatrix} kr+1-r & r\ell-1+r \\ kr+1 & r\ell-1 \end{pmatrix}, \text{ avec } k,\ell > 0 \text{ et } r > 1 \ .$$

$$\frac{Q(Y)}{(Y^{r}+C)^{k+1/r-1}\, Y^{r\ell-1}\, C^{\ell+k}} = z - K(x,y)$$

où Q est un polynôme de degré $r(k+\ell-1)$ et $C = x^r - y^r$.

Le polynôme Q et la constante $K(x,y)$

Ce polynôme Q s'écrit

$$Q(Y) = C^{k+\ell} \sum_{j=0}^{k+\ell-1} q_j Y^{rj} C^{-(j+1)},$$

avec l'expression exacte des coefficients :

$$q_{j+1} = \frac{(-1)^j}{r\ell - 1} \prod_{s=0}^{j} \frac{r(k+\ell-1-s)}{(\ell-1-s)r - 1} \quad \text{pour } j = 0, \dots, k+\ell-2,$$

$$q_0 = \frac{-1}{r\ell - 1}.$$

La constante $K(x,y)$ s'exprime

$$K(x,y) = \frac{-Q(y)}{x^{rk+1-r} y^{r\ell-1} (x^r - y^r)^{\ell+k}}$$

$$= -\sum_{j=0}^{k+\ell-1} q_j (x^r - y^r)^{-1-j} y^{r(j-\ell)+1} x^{r(1-k)-1}.$$

Moyenne et Variance

$$(Y^r + C)^{k+1/r-1}(z - K(x,y)) = \sum_{j=0}^{k+\ell-1} q_j C^{-(j+1)} Y^{r(j-\ell)+1}\,.$$

L'équation permet d'exprimer exactement et asymptotiquement les moments de X_n, le nombre de boules noires à l'étape n.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \frac{(k+\ell)(kr+1)}{k+\ell+1} n + cste + O(n^{-1/(k+\ell)})\,, \\ \mathbb{V}(X_n) &= \frac{(k+\ell)(kr+1)((\ell+1)r-1)}{(k+\ell+1)^2(k+\ell+2)} n + cste' + O(n^{-1/(k+\ell)}) \end{aligned}}$$

Polynôme annulateur et singularités

Le polynôme annulateur, noté $P(T, x, y, z)$, de la fonction $Y(x, y, z)$ est donné par la formule suivante :

$$P(T, x, y, z) = -\left(x^{r(k-1)+1}\, y^{r\ell-1}\right)^{r} Q(T)^{r} C^{-k-\ell}$$

$$+C^{-k-\ell}\left[(T^{r} + C)^{k-1}\, T^{r\ell-1}\left(x^{r(k-1)+1}\, y^{r\ell-1}\, C^{\ell+k}\, z + Q(y)\right)\right]^{r}(T^{r}+C)\,.$$

Pour obtenir les singularités possibles, il suffit de regarder les racines du résultant de P et $\partial_T P$.

```
SING := factor ( solve (resultant(P, D(P,T), T) , z) )
```

Polynôme annulateur et singularités

Le polynôme annulateur, noté $P(T,x,y,z)$, de la fonction $Y(x,y,z)$ est donné par la formule suivante :

$$P(T,x,y,z) = -\left(x^{r(k-1)+1}\,y^{r\ell-1}\right)^r Q(T)^r C^{-k-\ell}$$

$$+C^{-k-\ell}\left[(T^r+C)^{k-1}\,T^{r\ell-1}\left(x^{r(k-1)+1}\,y^{r\ell-1}\,C^{\ell+k}\,z+Q(y)\right)\right]^r (T^r+C)\,.$$

Pour obtenir les singularités possibles, il suffit de regarder les racines du résultant de P et $\partial_T P$.

```
SING := factor ( solve (resultant(P, D(P,T), T) , z) )
```

Chaque singularité a un facteur $(x-1)^{-1}$,
Sauf UNE, notée $\rho(x)$, telle que

$$\rho(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \sigma^{-1}\,.$$

Or, σ^{-1} est effectivement la singularité de la fonction $Y(1,1,z) = (1-\sigma z)^{-1/\sigma}$.

Développement de Newton-Puiseux

On regarde donc le développement de Newton-Puiseux pour Y au voisinage de $z = \rho(x)$.

Pour $z \to \rho(x)$ et $x \to 1$,

$$Y(x,z) = (\sigma\rho(x) - \sigma z)^{-1/\sigma}\,(1 + o(1))$$

Donc lorsque $x \to 1$, on a bien

$$Y(x,z) \underset{x \to 1}{\sim} (1 - \sigma z)^{-1/\sigma}(1 + o(1))$$

Conclusions asymptotiques

$$Y(x,1,z) \underset{\substack{z\to\rho(x)\\ x\to 1}}{=} (\sigma\rho(x))^{-1/\sigma}\left(1-\frac{z}{\rho(x)}\right)^{-1/\sigma}(1+o(1))$$

Ainsi,

$$[z^n]Y(x,1,z) \underset{\substack{n\to\infty\\ z\to\rho(x)\\ x\to 1}}{\sim} \frac{\rho(x)^{-n}\, n^{1/\sigma-1}}{\Gamma\left(\sigma^{-1}\right)}$$

La fonction génératrice de probabilité s'exprime alors

$$p_n(x) = \frac{[z^n]Y(x,1,z)}{[z^n]Y(1,1,z)} \underset{\substack{n\to\infty\\ z\to\rho(x)\\ x\to 1}}{\sim} (\sigma\rho(x))^{-1/\sigma}\left(\frac{\rho(x)}{\rho(1)}\right)^{-n}$$

Ainsi, par le théorème des Quasi-Puissances, on obtient

- une convergence vers une loi Gaussienne avec vitesse de convergence,
- une loi locale limite,
- des bornes de grandes déviations.

Conclusion

- Guess'n'Prove automatique sur un grand nombre de cas.
- condition suffisante pour l'algébricité
- résultats asymptotiques précis pour ces urnes algébriques
- Conjecture : Il n'y a pas d'autres urnes équilibrées additives algébriques.
- comportement analytique des urnes additives non algébriques ?

Conclusion

- Guess'n'Prove automatique sur un grand nombre de cas.
- condition suffisante pour l'algébricité
- résultats asymptotiques précis pour ces urnes algébriques
- Conjecture : Il n'y a pas d'autres urnes équilibrées additives algébriques.
- comportement analytique des urnes additives non algébriques ?

Merci de votre attention.