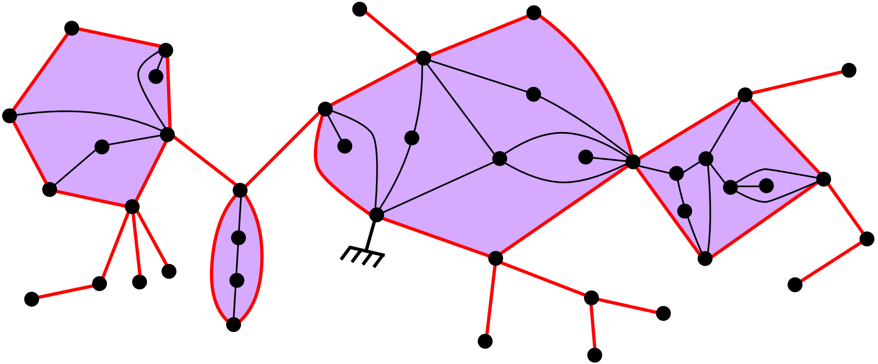
Croissance de cartes planaires par une approche bijective

Jérémie BETTINELLI

Institut ÉLIE CARTAN Nancy

15 octobre 2012

Quadrangulations à bord



Quadrangulation à bord : carte plannaire dont toutes les faces sauf la face contenant la racine sont de degré 4.

Caractéristiques

Soit $\mathcal{Q}_{n,p}$ l'ensemble des quadrangulations à bord ayant

- n faces internes,
- $2p$ demi-arêtes sur le bord,

et donc, par la relation d'Euler,

- $n + p + 1$ sommets,
- $2n + p$ arêtes.

Identités combinatoires

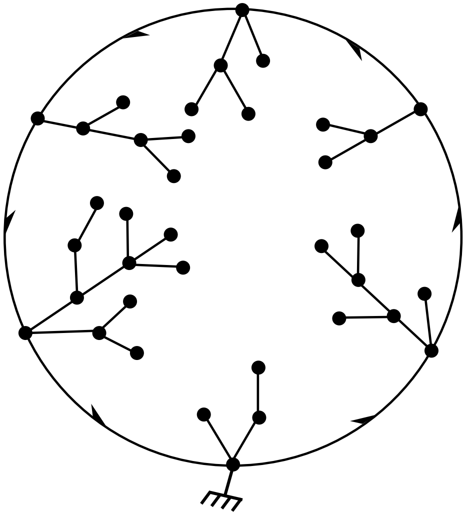
On peut montrer de diverses façons que

$$|\mathcal{Q}_{n,p}| = \frac{3^n\,(2p)!\,(2n+p-1)!}{p!\,(p-1)!\,(n+p+1)!}$$

On en déduit les identités suivantes :

- $(2p+1)(2p+2)(2n+p)\,|\mathcal{Q}_{n,p}| = p\,(p+1)(n+p+2)\,|\mathcal{Q}_{n,p+1}|$
- $3(2n+p)(2n+p+1)\,|\mathcal{Q}_{n,p}| = (n+1)(n+p+2)\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}|$

Échauffement : forêts



$\mathcal{F}_{n,p}$: ensemble des forêts à

- n arêtes,
- p arbres,
- $n + p$ sommets,
- $2n + p$ coins.

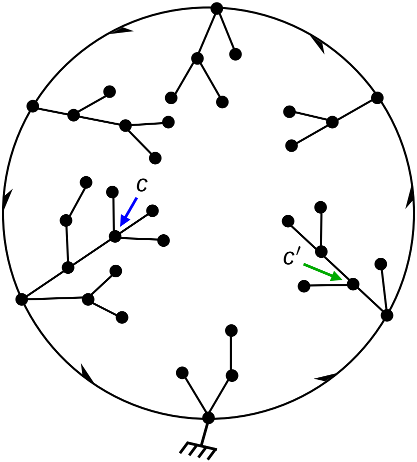
$$|\mathcal{F}_{n,p}| = \frac{p}{2n+p}\binom{2n+p}{n}$$

Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\ |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$

Ajout d'une arête

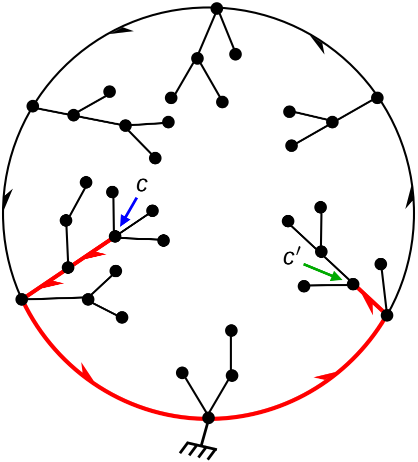
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On part d'une forêt avec deux coins marqués c et c'

Ajout d'une arête

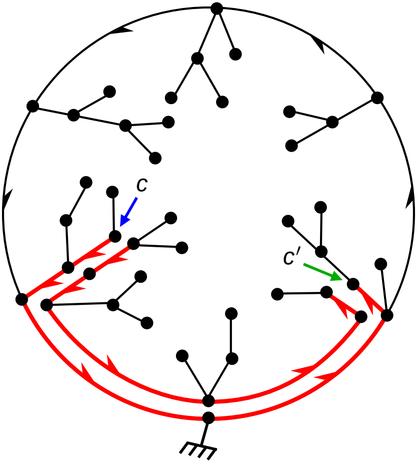
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On part d'une forêt avec deux coins marqués c et c'
- On considère l'unique chemin auto-évitant de c à c'

Ajout d'une arête

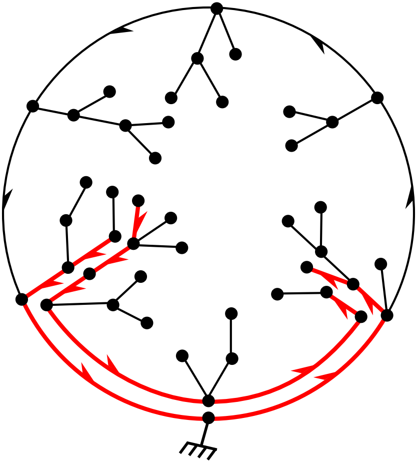
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On part d'une forêt avec deux coins marqués c et c'
- On considère l'unique chemin auto-évitant de c à c'
- On « coupe » le long de ce chemin entre les coins c et c'

Ajout d'une arête

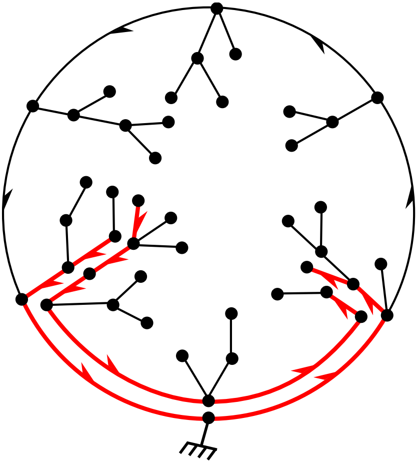
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de c et une demi-arête « à droite » à la place de c'

Ajout d'une arête

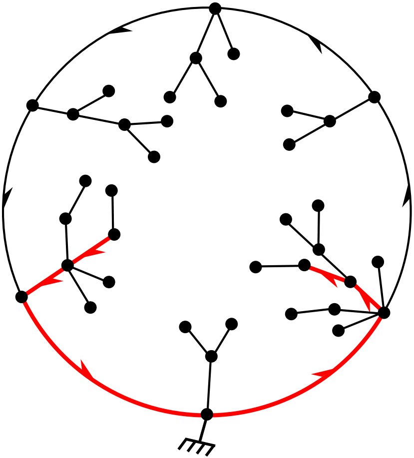
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\ |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de c et une demi-arête « à droite » à la place de c'
- On décale

Ajout d'une arête

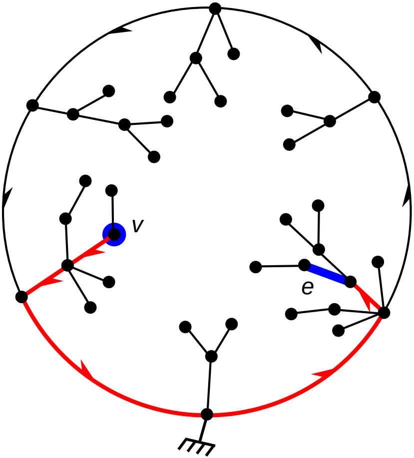
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\ |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de c et une demi-arête « à droite » à la place de c'
- On décale
- On recolle

Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}}\,|\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}}\underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



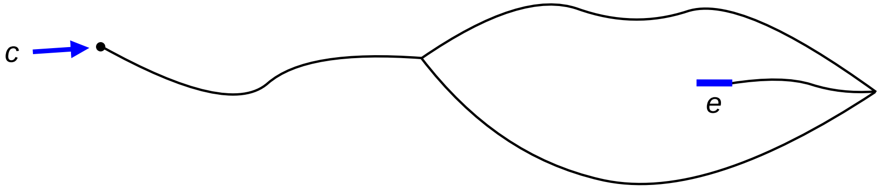
- On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de c et une demi-arête « à droite » à la place de c'
- On décale
- On recolle
- On distingue un sommet v et une arête e

Géodésique la plus à gauche/droite

En général, il y a plusieurs chemins entre deux éléments ; on utilise les géodésiques les plus à gauche ou les plus à droite.

Géodésique la plus à gauche/droite

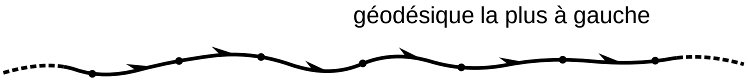
En général, il y a plusieurs chemins entre deux éléments ; on utilise les géodésiques les plus à gauche ou les plus à droite.



La géodésique la plus à gauche de c à e n'est pas toujours l'inverse de la géodésique la plus à droite de e à c.

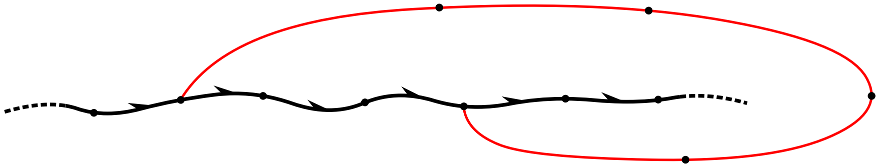
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l’inverse d’une géodésique la plus à droite, et vice versa.



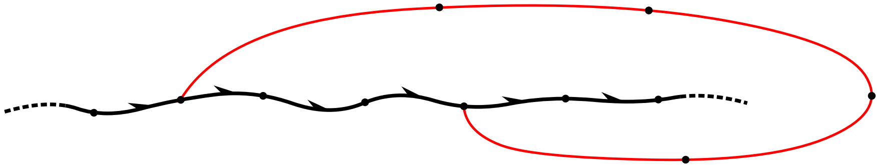
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



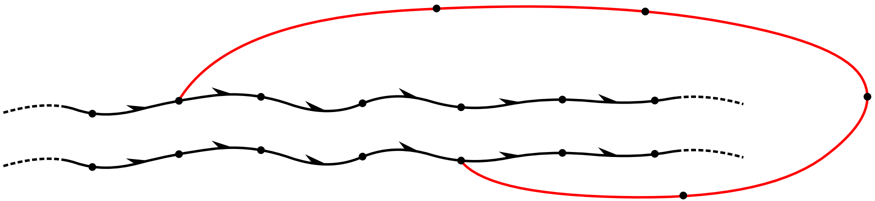
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



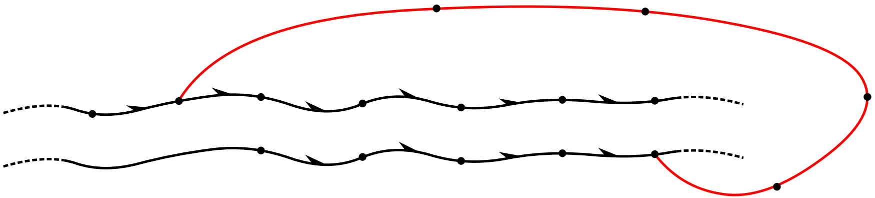
Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



Géodésique la plus à gauche/droite

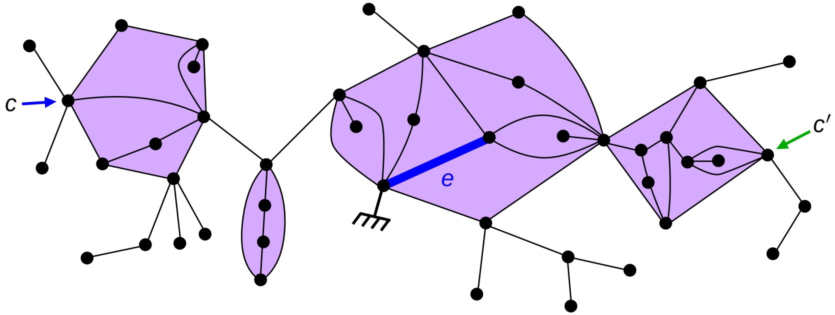
En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

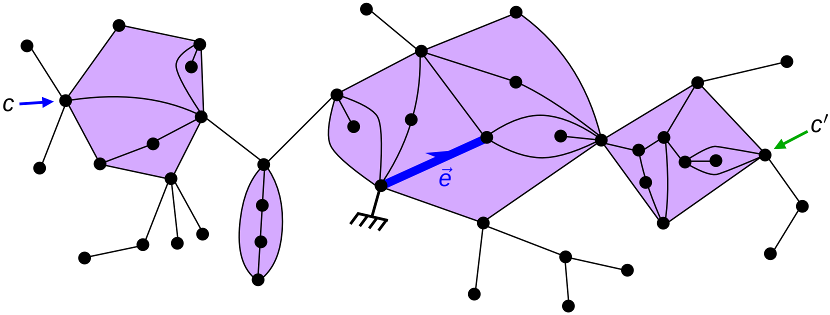
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

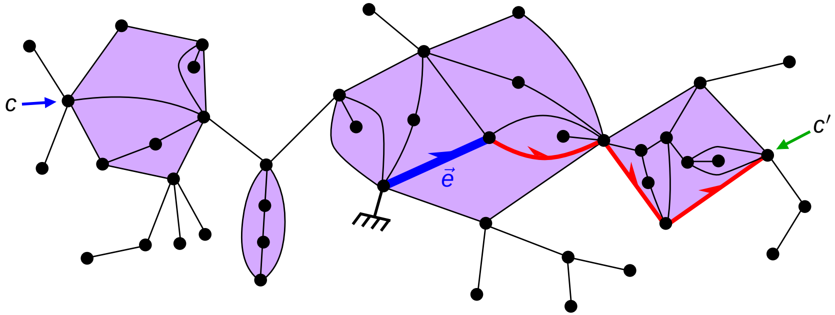


✧ On oriente e vers c'

Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

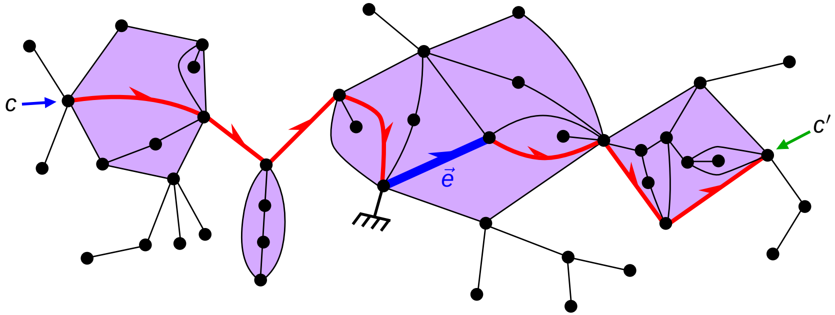


✧ On considère la géodésique la plus à droite de $\vec{e}$ vers c'

Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

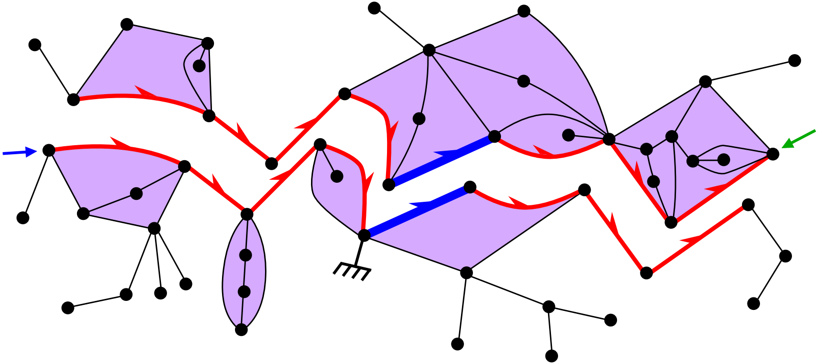


- On fait « de même » avec c au lieu de c'

Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

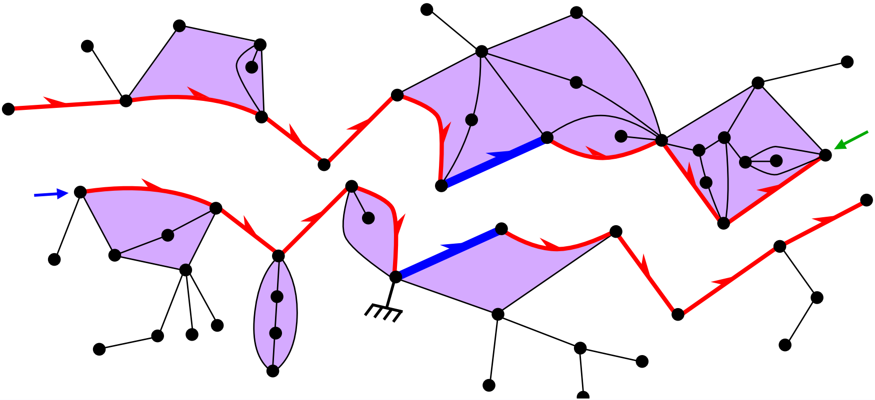
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

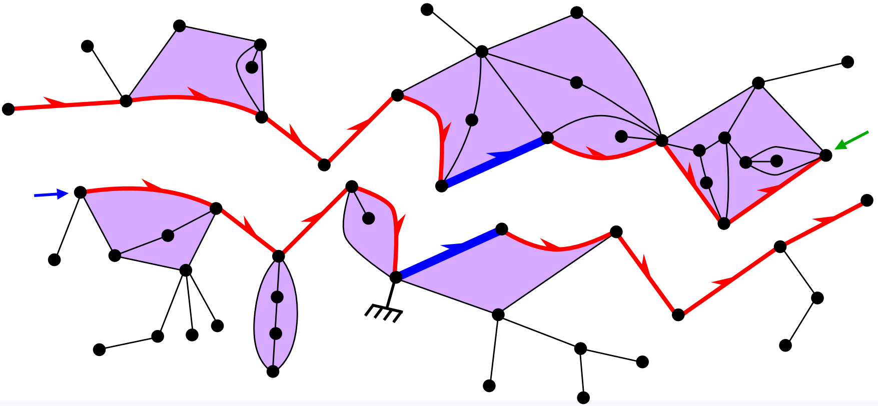
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

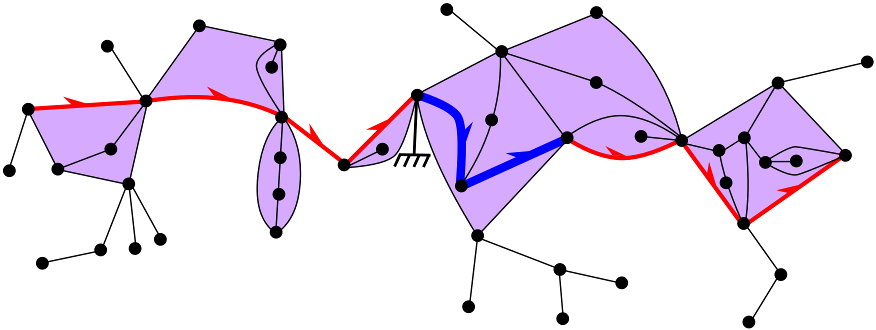
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

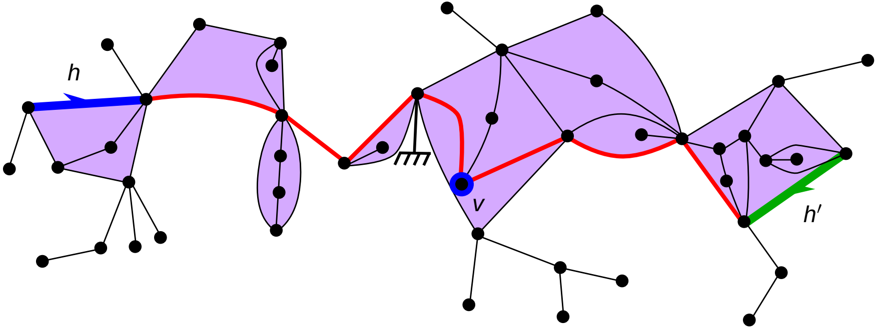
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



Ajout de deux demi-arêtes

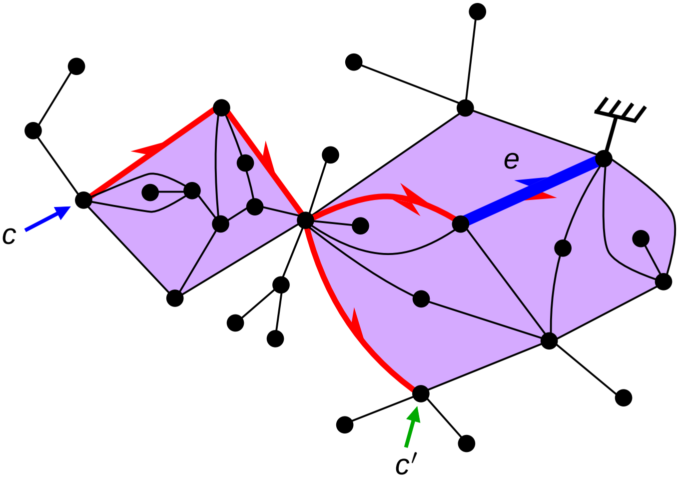
$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}}\ \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\bigstar}\ \underbrace{p}_{\text{autre }\bigstar}\ \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

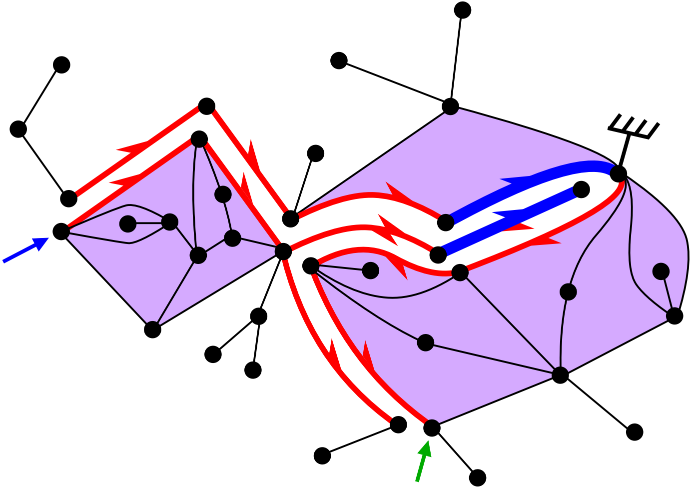


- On marque un sommet v et deux demi-arêtes h et h'

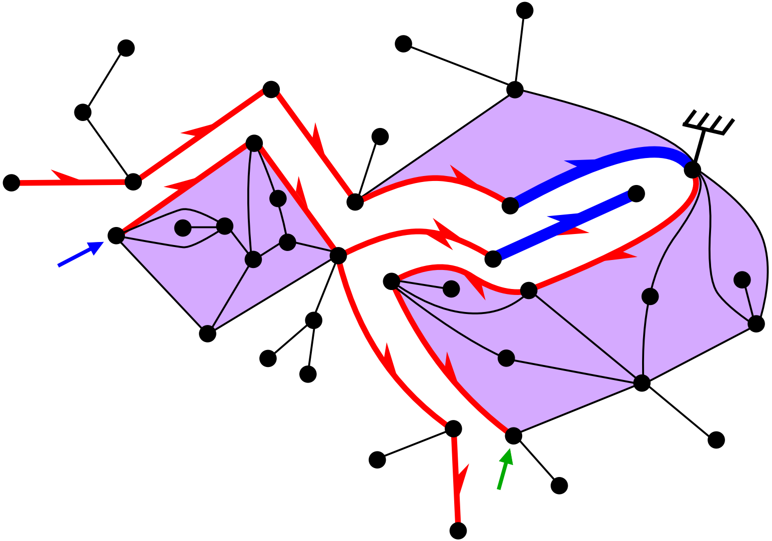
Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »



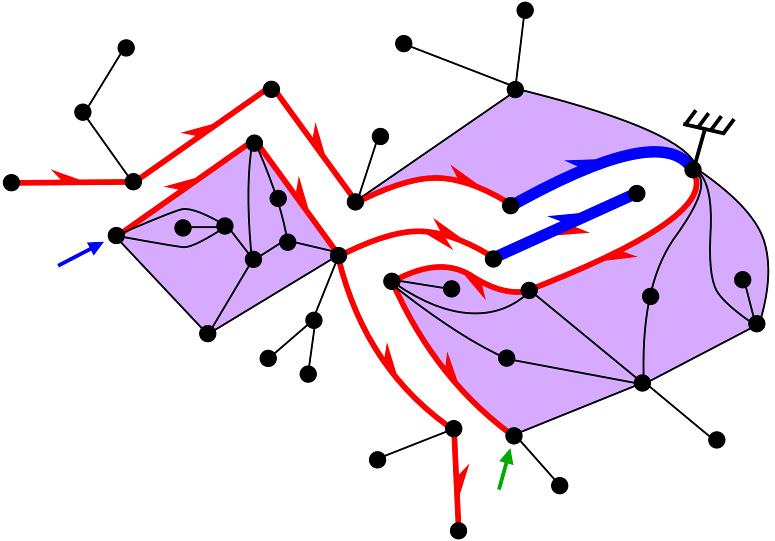
Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »



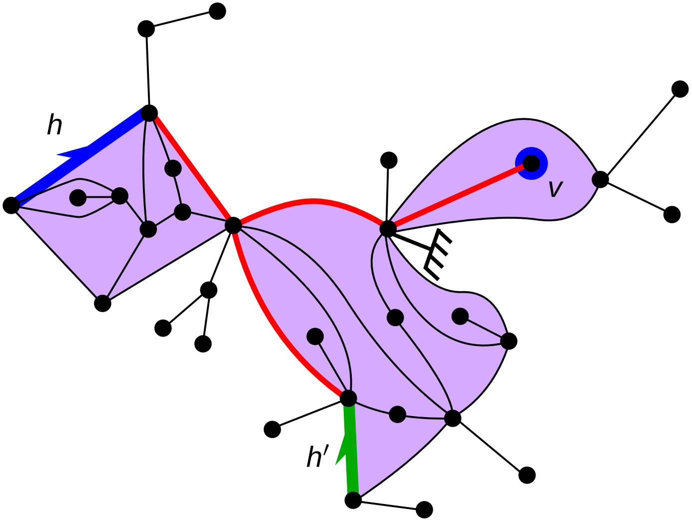
Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »



Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »

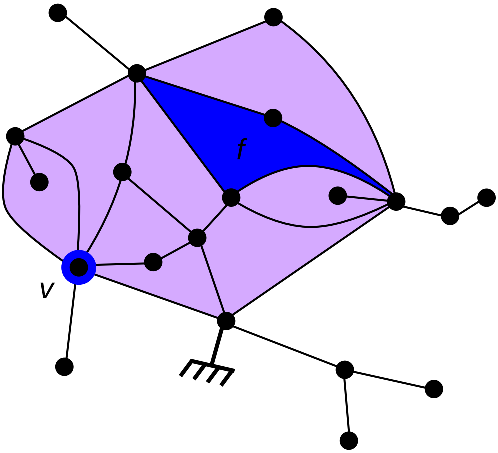


Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »



Suppression d'une face : cas confluent

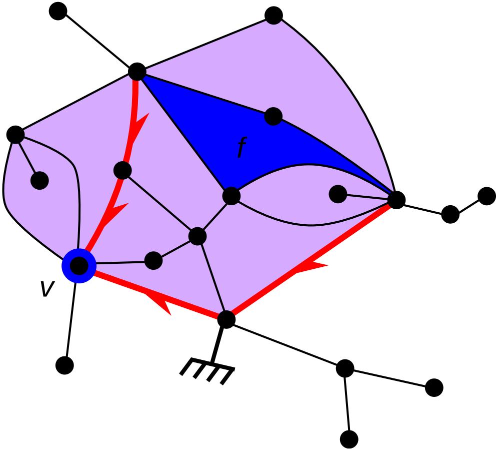
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f confluente

Suppression d'une face : cas confluent

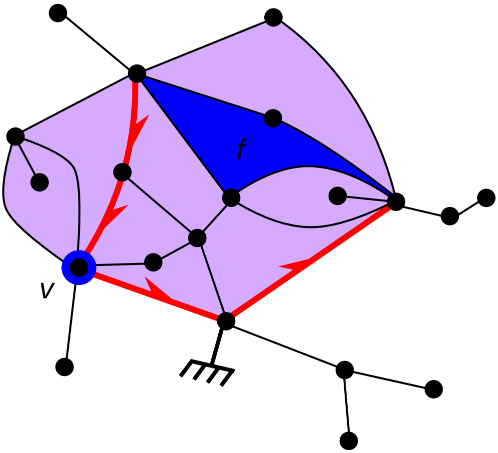
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\,\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f confluente
- On considère les géodésiques les plus à gauche de f à v

Suppression d'une face : cas confluent

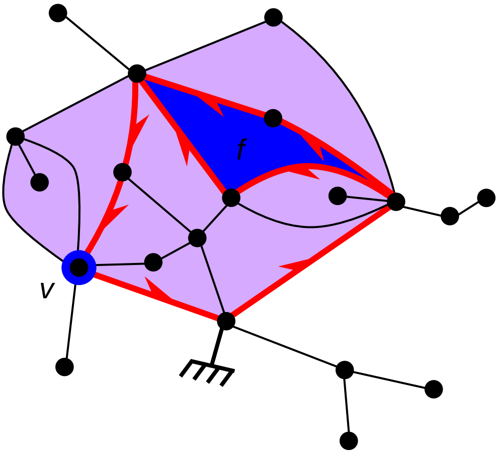
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\ |\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\ \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\ |\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f confluente
- On considère les géodésiques les plus à gauche de f à v
- On en inverse une

Suppression d'une face : cas confluent

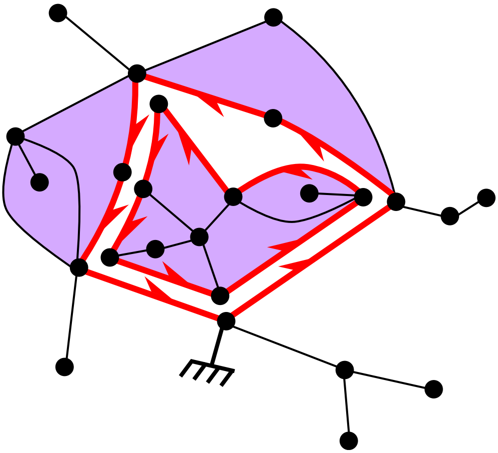
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f confluente
- On considère les géodésiques les plus à gauche de f à v
- On en inverse une
- On crée ainsi deux boucles

Suppression d'une face : cas confluent

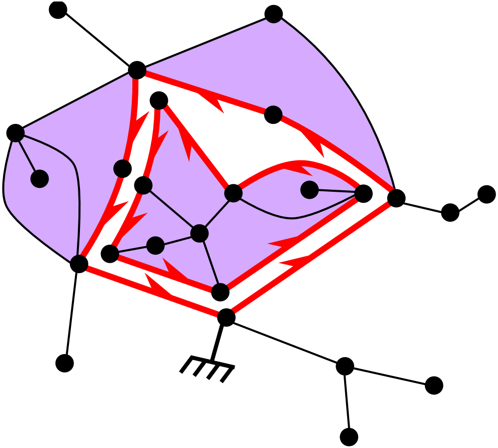
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\;\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On coupe

Suppression d'une face : cas confluent

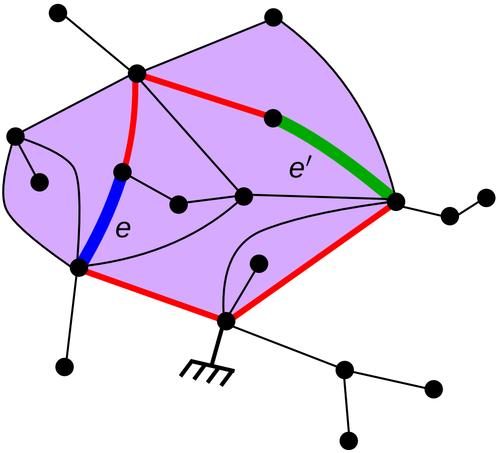
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\,\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On coupe
- On décale d'un cran et on recolle

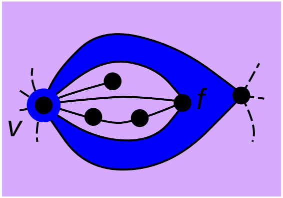
Suppression d'une face : cas confluent

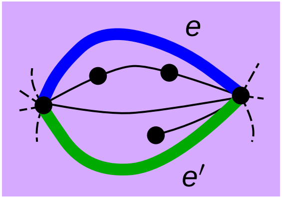
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\,\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



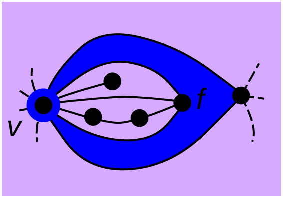
- On coupe
- On décale d'un cran et on recolle
- On distingue deux arêtes e et e' et on donne à la marque la valeur c

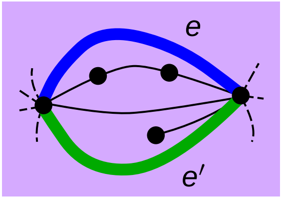
Cas où la frontière de f n'est pas simple



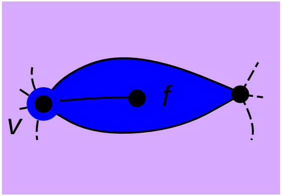


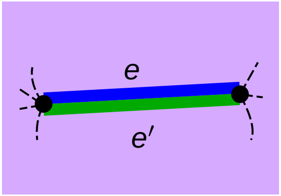
Cas où la frontière de f n'est pas simple





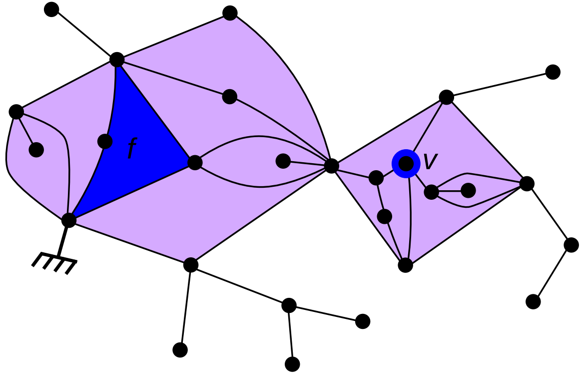
Dans le cas où f est « plate », e et e' désignent la même arête :





Suppression d'une face : cas simple

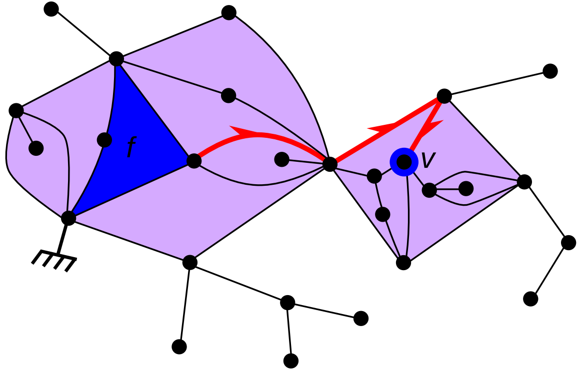
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\,\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f simple

Suppression d'une face : cas simple

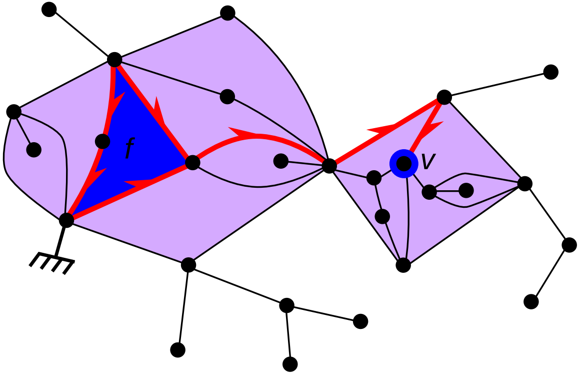
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f simple
- On considère la géodésique la plus à gauche de f à v

Suppression d'une face : cas simple

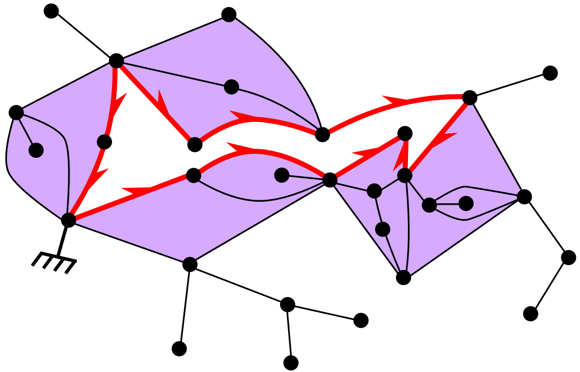
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\;\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On part d'une quadrangulation avec un sommet v et une face f simple
- On considère la géodésique la plus à gauche de f à v
- On ajoute la frontière de f

Suppression d'une face : cas simple

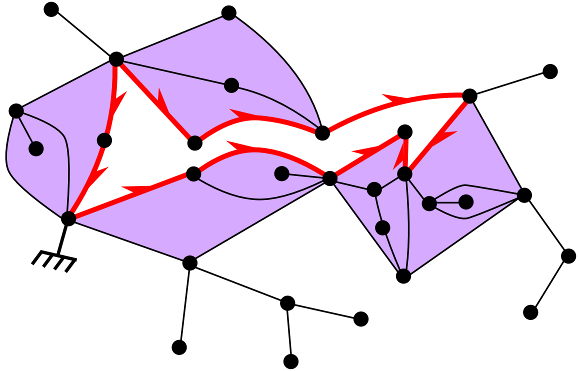
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On coupe

Suppression d'une face : cas simple

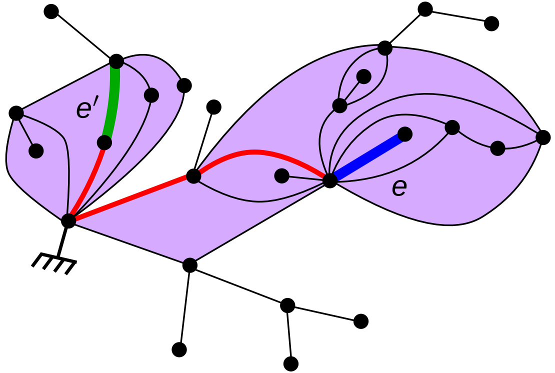
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\,\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On coupe
- On recolle

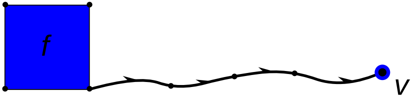
Suppression d'une face : cas simple

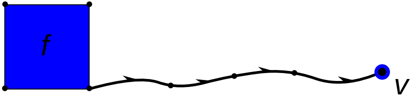
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}}\underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}}\,|\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}}\,\underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}}\underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}}\,|\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- On coupe
- On recolle
- On distingue deux arêtes e et e'

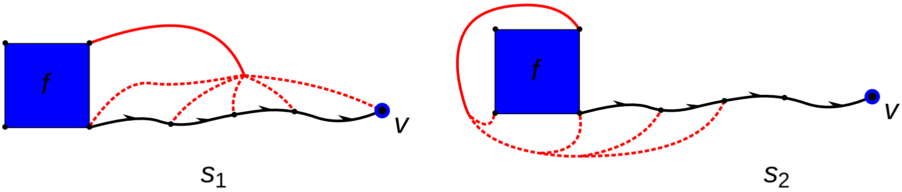
Définition de la valeur de la marque





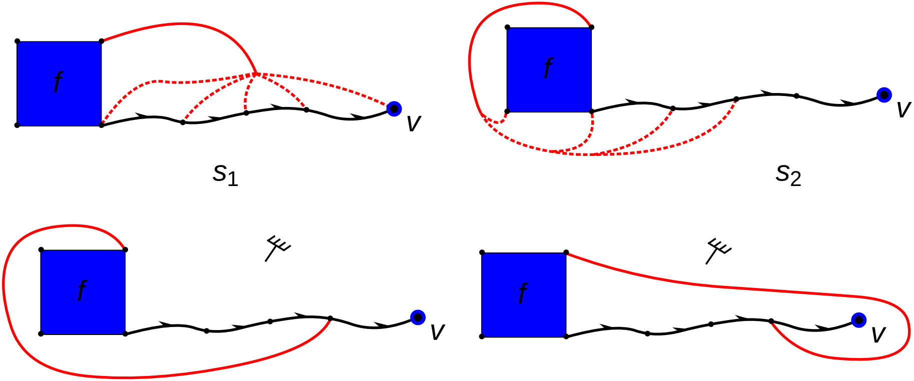
On définit la valeur de la marque selon la manière dont les deux géodésiques se rencontrent.

Définition de la valeur de la marque



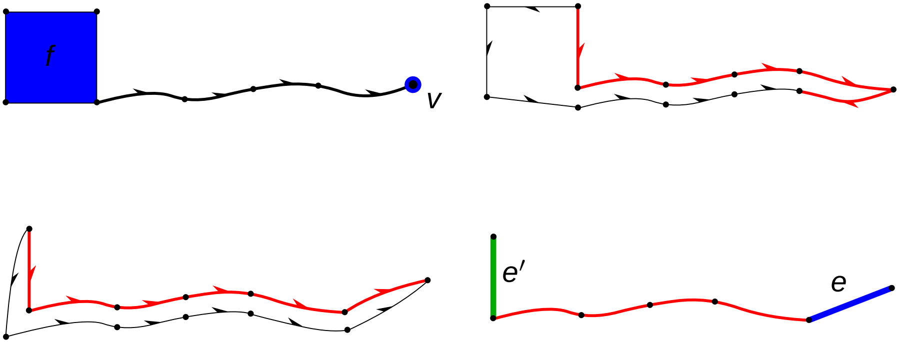
On définit la valeur de la marque selon la manière dont les deux géodésiques se rencontrent.

Définition de la valeur de la marque

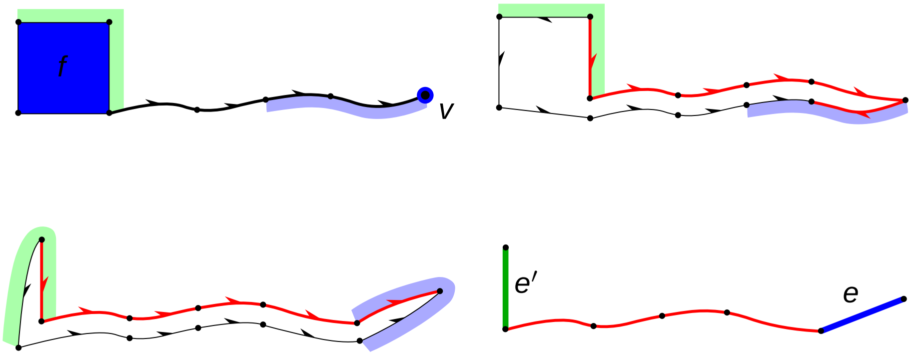


On définit la valeur de la marque selon la manière dont les deux géodésiques se rencontrent.

Comment retrouver le chemin



Comment retrouver le chemin



Merci de votre attention