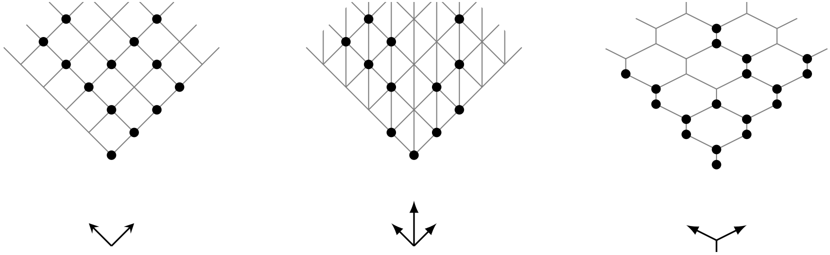
Animaux dirigés sur le réseau carré avec diagonales

Axel Bacher

17 septembre 2012

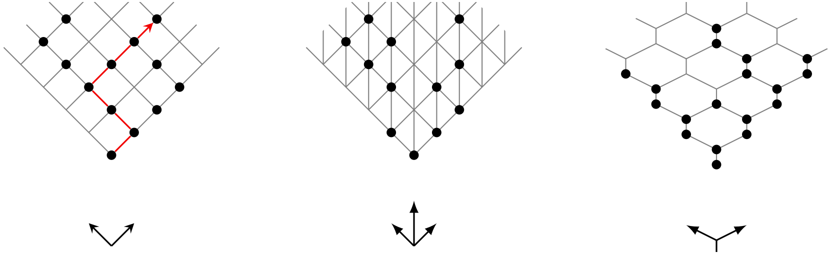
Sommaire

Animaux dirigés



- Un animal est une partie connexe et finie d'un réseau.
- Les animaux dirigés forment une sous-famille d'animaux.

Animaux dirigés



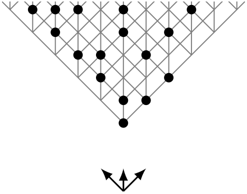
- Un animal est une partie connexe et finie d'un réseau.
- Les animaux dirigés forment une sous-famille d'animaux.

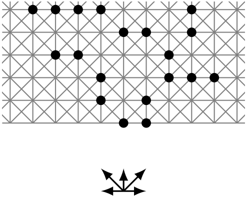
Réseaux dirigés

 	carré	[Dhar 82]
	triangulaire	[Dhar 82]
	$\mathcal{L}_3$	[Bousquet-Mélou–Conway 96]
	carré part. dirigé	
		

- D'autres réseaux ont été étudiés : $\mathcal{L}_n$, réseaux n-décorés... [Conway–Brak–Guttmann 93, Bousquet-Mélou 98]

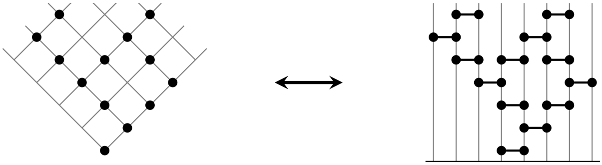
Réseaux dirigés (suite)





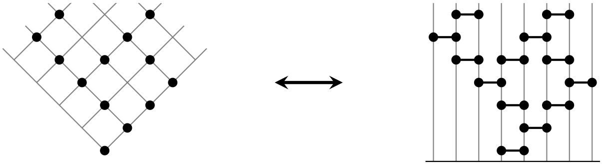
Empilements de dimères

[Viennot 86, Bétréma–Penaud 93]



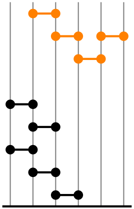
Empilements de dimères

[Viennot 86, Bétréma–Penaud 93]

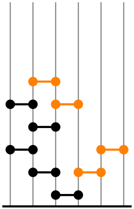


- Les animaux dirigés sont en bijection avec certaines pyramides de dimères.

Composition des empilements

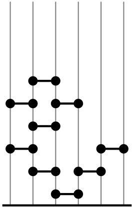


Composition des empilements



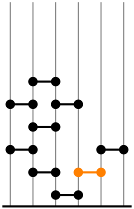
- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



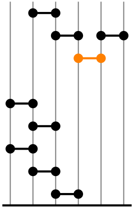
- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



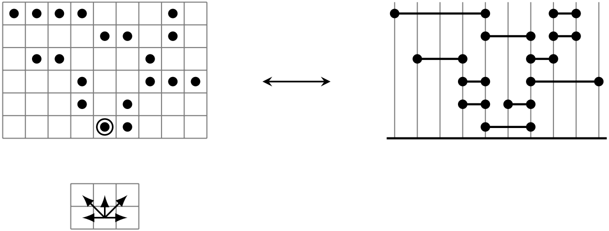
- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.

Composition des empilements



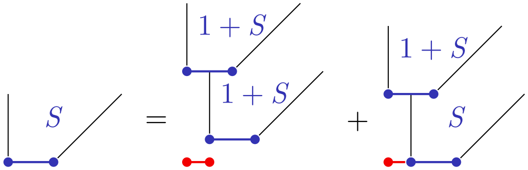
- On compose en laissant tomber un empilement sur l'autre.
- On factorise en poussant une pièce vers le haut.

Empilements de polymères



- Chaque segment de l'animal est remplacé par un polymère.
- Le résultat est une pyramide de polymères.

Construction des demi-pyramides



- La série des demi-pyramides vérifie :

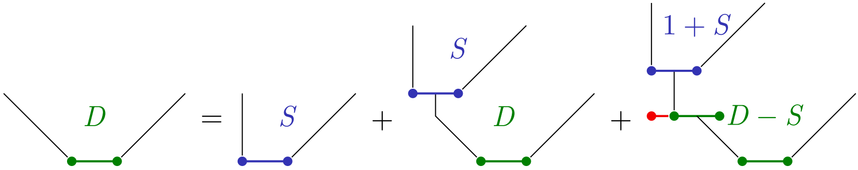
$$S(t) = t(1 + S(t))^2 + tS(t)(1 + S(t)),$$

ou

$$S(t) = t(1 + S(t))(1 + 2S(t)).$$

- Ses coefficients sont les petits nombres de Schröder.

Constructions des pyramides



- La série des animaux dirigés vaut :

$$D(t,u) = S(t) + uD(t,u)S(t) + tu\big(D(t,u) - S(t)\big)\big(1 + S(t)\big),$$

ou

$$D(t,u) = S(t) + \frac{uS(t)^2}{1 - u\big(S(t) + t + tS(t)\big)}.$$

Résultats finaux

Proposition

Les séries des demi-animaux et animaux valent :

$$S(t) = \frac{1 - 3t - \sqrt{1 - 6t + t^2}}{4t}\,;$$
$$D(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+t}{\sqrt{1 - 6t + t^2}} - 1\right).$$

Résultats finaux

Proposition

Les séries des demi-animaux et animaux valent :

$$S(t) = \frac{1 - 3t - \sqrt{1 - 6t + t^2}}{4t}\,;$$

$$D(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+t}{\sqrt{1 - 6t + t^2}} - 1\right).$$

Le nombre d'animaux dirigés d'aire n vérifie :

$$d_n \approx \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n n^{-1/2}.$$

Résultats finaux

Proposition

Les séries des demi-animaux et animaux valent :

$$S(t) = \frac{1 - 3t - \sqrt{1 - 6t + t^2}}{4t}\ ;$$

$$D(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+t}{\sqrt{1 - 6t + t^2}} - 1\right).$$

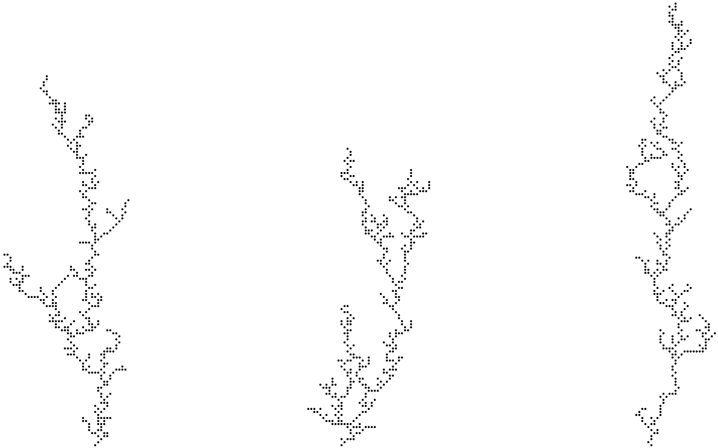
Le nombre d'animaux dirigés d'aire n vérifie :

$$d_n \approx \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n n^{-1/2}.$$

La largeur moyenne d'un animal dirigé d'aire n vérifie :

$$\ell_n \approx \sqrt{n}.$$

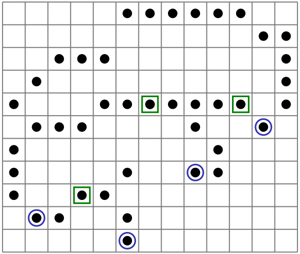
Génération aléatoire



- On utilise les décompositions précédentes et un algorithme de Boltzmann.

Définition

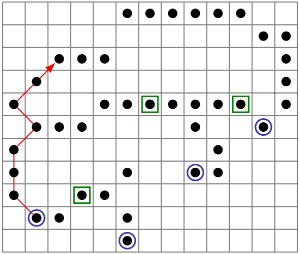
[Bousquet-Mélou–Rechnitzer 02]



Un animal est multi-dirigé si :

Définition

[Bousquet-Mélou–Rechnitzer 02]

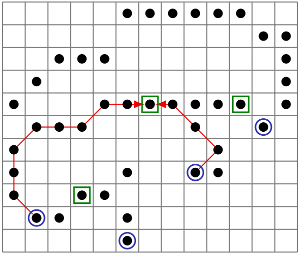


Un animal est multi-dirigé si :

- chaque site est relié à une source ;

Définition

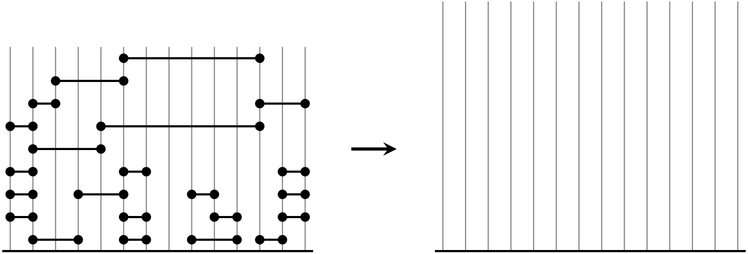
[Bousquet-Mélou–Rechnitzer 02]



Un animal est multi-dirigé si :

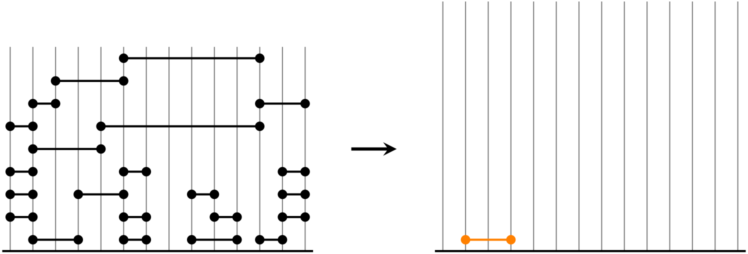
- chaque site est relié à une source ;
- chaque clef de voûte est reliée à une source à sa gauche et une source à sa droite.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



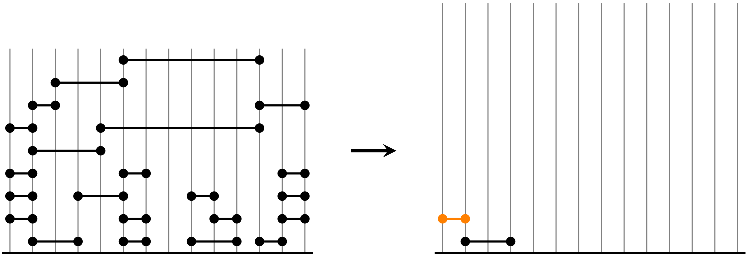
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



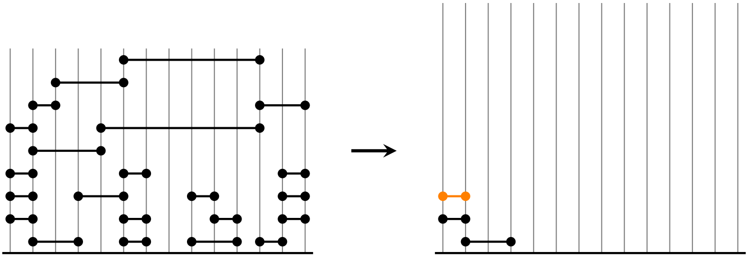
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



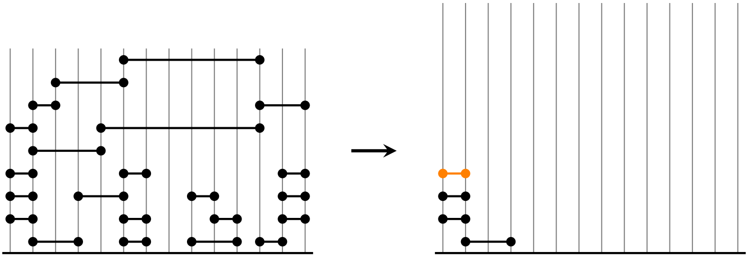
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



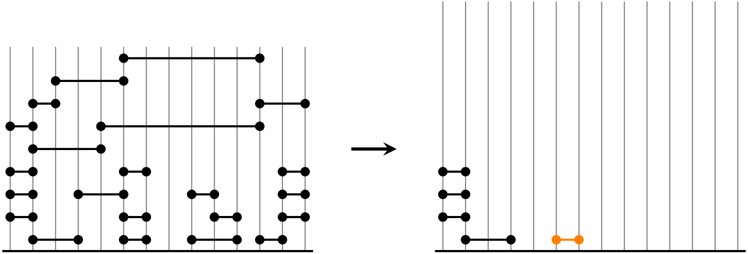
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



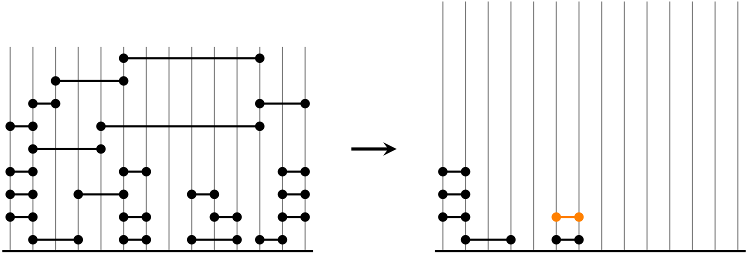
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



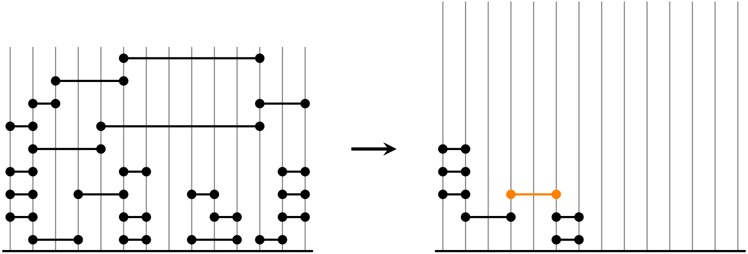
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



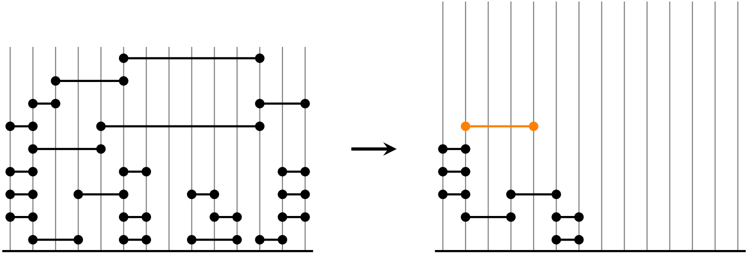
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



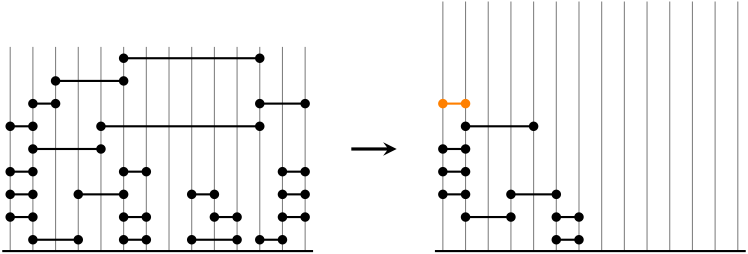
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



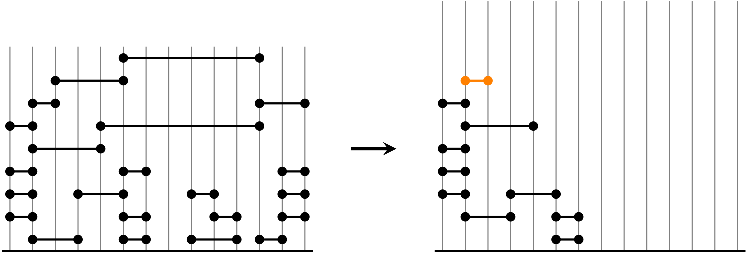
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



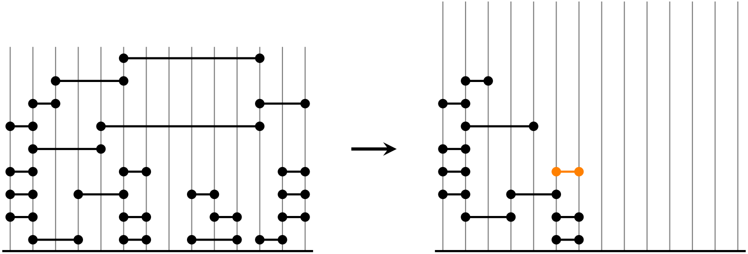
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



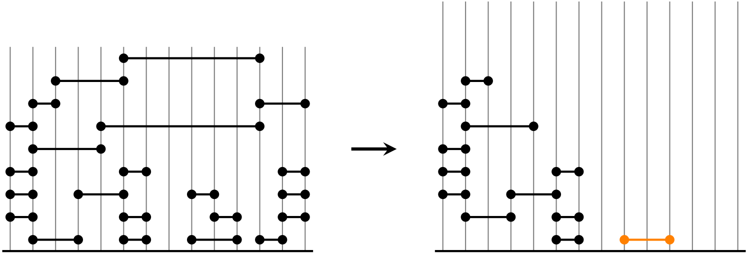
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



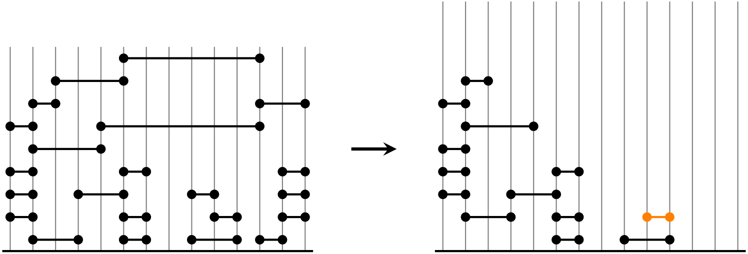
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



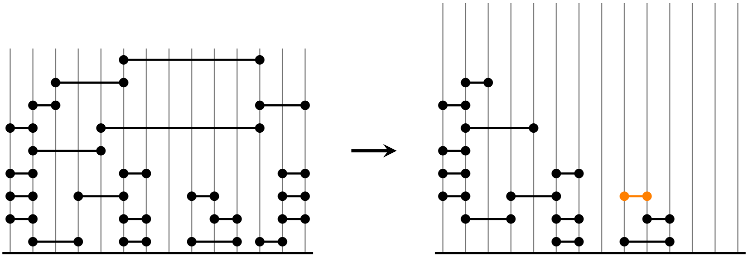
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



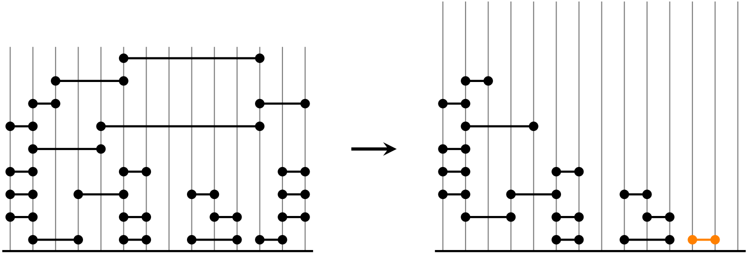
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



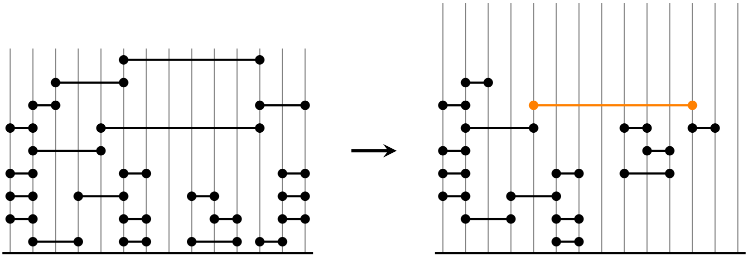
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



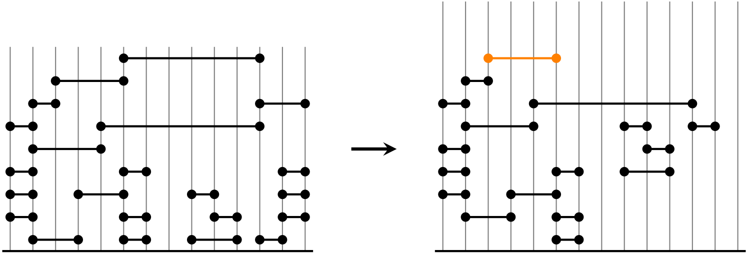
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



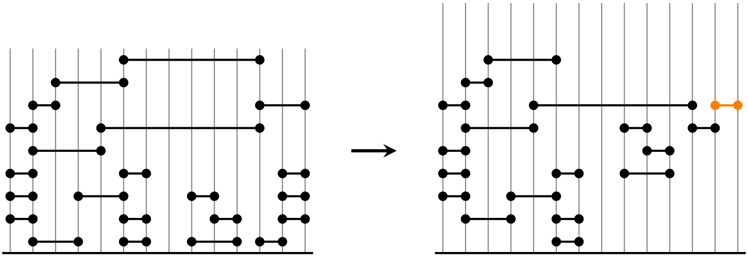
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



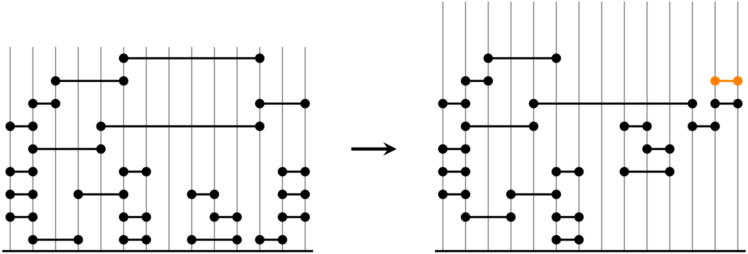
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



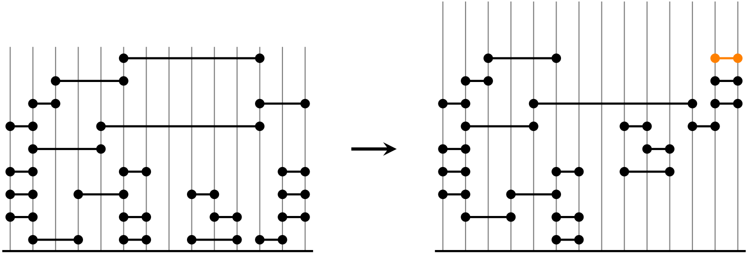
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



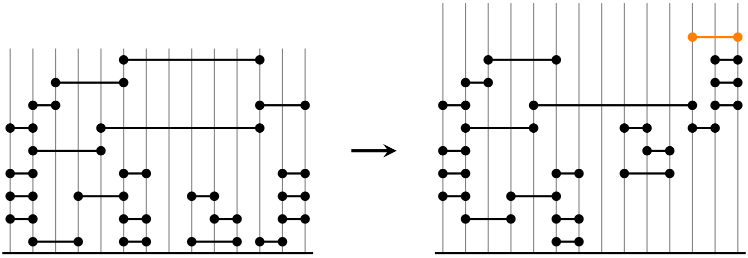
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



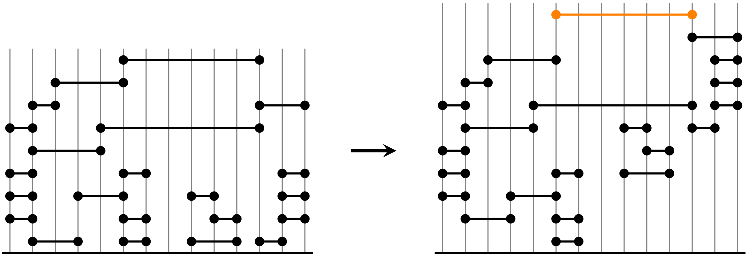
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



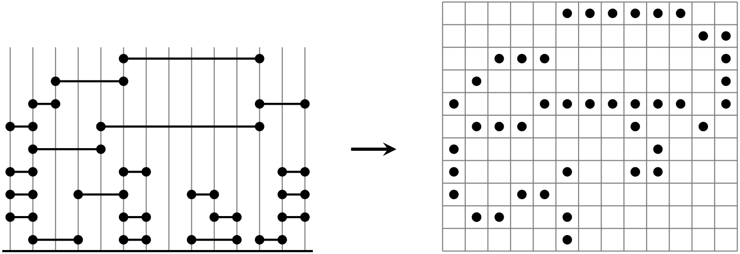
- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Empilement connexes et animaux multi-dirigés



- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

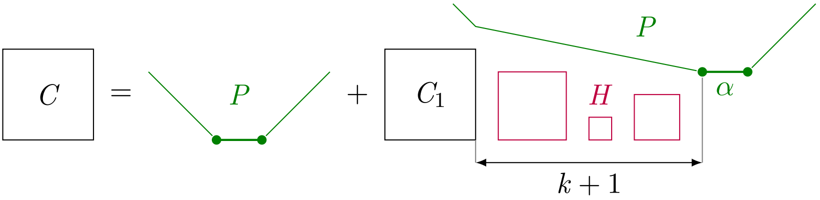
Empilement connexes et animaux multi-dirigés



- Il y a bijection entre empilements connexes et animaux multi-dirigés.

Décomposition nordique

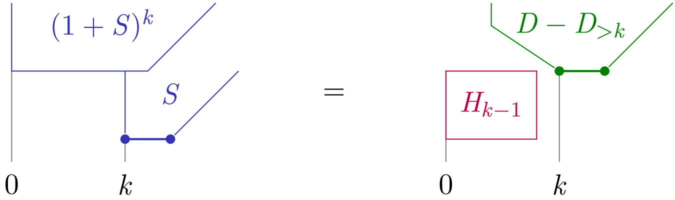
[Viennot 06]



- La série des animaux multi-dirigés vérifie :

$$M(t) = D(t) + \sum_{k \geqslant 0} M(t) H_{k-1}(t) D_{>k}(t).$$

Calcul de la série $H_{k-1}(t)D_{>k}(t)$



- On a l'identité :

$$H_{k-1}(t)D_{>k}(t) = S(t)\big(1+S(t)\big)^k \frac{D_{>k}(t)}{D(t) - D_{>k}(t)}.$$

Résultat final

Théorème

La série des animaux multi-dirigés vaut :

$$M(t) = \frac{D}{1 - \sum_{k \geqslant 0} S(1+S)^k \frac{QR^k}{1 - QR^k}},$$

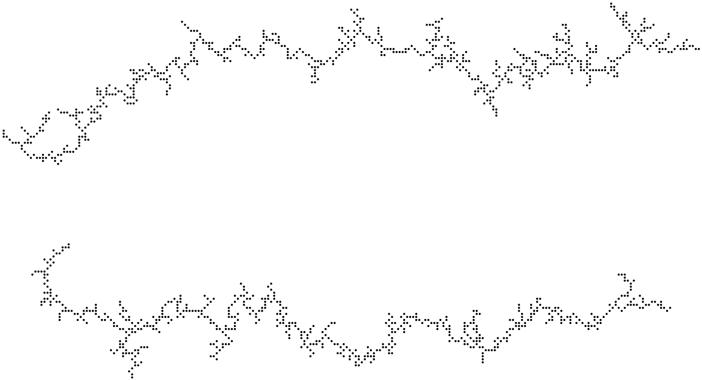
où les séries Q et R valent :

$$Q(t) = 2(1-t)S(t) - t; \qquad R(t) = (1+t)S(t) + t.$$

La série $M(t)$ n'est pas D-finie. Ses coefficients vérifient

$$m_n \approx \mu^n \qquad \text{avec } \mu = 6{,}47\ldots$$

Génération aléatoire



- On utilise la décomposition nordique et un algorithme de Boltzmann.