NOTES SUR LE CRITÈRE DE GELFAND

FLORENT HIVERT

1. Restrictions et modules sur le commutant

Soit B une algèbre sur $\mathbb{C}$ et A une sous-algèbre. Soit U un A-module et V un B-module. On considère l'espace vectoriel

$$H := \mathrm{Hom}_A(U, \mathrm{Res}_A^B V)\,. \tag{1}$$

On note $Z := Z(B, A)$ la sous algèbre de B des éléments qui commutent avec A.

Lemme 1.1. *H est un Z-module pour l'action*

$$z \cdot h := u \mapsto z \cdot h(u). \tag{2}$$

Démonstration. On montre que $z \cdot h \in H$:

$$\begin{aligned}(z \cdot h)(a \cdot u) &\overset{\text{def}}{=} z \cdot h(a \cdot u) \overset{\text{morph}}{=} z \cdot (a \cdot h(u)) \\ &\overset{\text{act}}{=} (za) \cdot h(u) \overset{\text{def } Z}{=} (az) \cdot h(u) \overset{\text{act}}{=} a \cdot (z \cdot h(u)) \overset{\text{def}}{=} a \cdot (z \cdot h)(u)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

De plus,

$$(z \cdot (z' \cdot h))(u) = (zz' \cdot h(u)) = (zz' \cdot h)(u)\,. \tag{4}$$

H est donc bien un Z-module. ☐

Le but ce cette section est de montrer que si U et V sont simples (sur resp. A et B), alors H est simple sur Z.

Lemme 1.2. *On note $\mathcal{L}(U, V)$ l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaire de U dans V. C'est un $(B \otimes_k A)$ bimodule (B-mod-A) avec les actions suivantes :*

$$b \cdot f := u \mapsto b \cdot f(u) \quad \textit{et} \quad f \cdot a := u \mapsto f(a \cdot u)\,. \tag{5}$$

Démonstration. C'est un B-mod :

$$b \cdot (b' \cdot f) = u \mapsto b \cdot (b' \cdot (f(u))) = u \mapsto bb' \cdot (f(u)) = bb' \cdot f\,. \tag{6}$$

C'est un mod-A :

$$\begin{aligned}(f \cdot a) \cdot a' &\overset{\text{def}}{=} (u \mapsto f(a \cdot u)) \cdot a' \overset{\text{def}}{=} u \mapsto f(a \cdot (a' \cdot u)) \\ &\overset{\text{act}}{=} u \mapsto f(aa' \cdot u) \overset{\text{def}}{=} f \cdot aa'\,. \quad \square\end{aligned} \tag{7}$$

Les deux structures de module commutent :

$$b \cdot (f \cdot a) = u \mapsto b \cdot f(a \cdot u) = (b \cdot f) \cdot a\,. \tag{8}$$

Note 1.3. On peux aussi écrire $\mathcal{L}(U, V)$ comme $V \otimes_k U^*$ où U^* est le module dual de U, c'est-à-dire l'espace des formes linéaire sur U avec l'action

$$(\phi \cdot a) := u \mapsto \phi(a \cdot u)\,. \tag{9}$$

Date: Juin 2016.

L'espace vectoriel sous-jacent à B est aussi un $(B \otimes_k A)$-bimodule par les multiplication à gauches et à droite. Il y a donc un sens à considérer l'espace vectoriel des morphismes de $(B \otimes_k A)$-bimodules de B dans $\mathcal{L}(U, V)$.

$$L := \hom_{B \otimes_K A}(B, \mathcal{L}(U, V)) \,. \tag{10}$$

Lemme 1.4. *L est un Z-module pour l'action*

$$z \cdot l := b \mapsto l(bz) \tag{11}$$

Démonstration. Montrons que $z \cdot l \in L$**To Do :**
C'est une action :

$$\begin{aligned} z \cdot (z' \cdot l) \overset{\text{def}}{=} z \cdot (b \mapsto l(bz')) \overset{\text{def}}{=} b \mapsto l((bz)z') \\ = b \mapsto l(b(zz')) \overset{\text{def}}{=} (zz') \cdot l \,. \quad \square \end{aligned} \tag{12}$$

L'idée est de transformer le Hom_A de la définition de H en un $\mathcal{L}$ ou ce qui revient au même, un produit tensoriel sur A en un produit tensoriel sur k.

Proposition 1.5. *Pour $h \in H$ et $l \in L$, on pose*

$$\hat{h} := b \mapsto (u \mapsto b \cdot h(u)) \quad \text{et} \quad \tilde{l} := u \mapsto l(1)(u) \,. \tag{13}$$

Alors, les applications $h \mapsto \hat{h}$ et $l \mapsto \tilde{l}$ sont deux isomorphismes réciproques des Z-modules H et L. En particulier, ils sont isomorphes.

Démonstration.
- Si $h \in H$ alors $\hat{h} \in L$.

$$\hat{h}(b' \cdot b \cdot a) = \hat{h}(b'ba) = u \mapsto b'ba \cdot h(u) = b' \cdot b \cdot h(a \cdot u) = b' \cdot \hat{h} \cdot a. \tag{14}$$

- $\hat{\cdot}$ est un Z-morphisme.

$$\widehat{z \cdot h} = u \mapsto \widehat{z \cdot h}(u) \overset{\text{def}}{=} b \mapsto (u \mapsto b \cdot (z \cdot h(u))) \tag{15}$$

$$\overset{\text{act}}{=} b \mapsto (u \mapsto bz \cdot h(u)) \tag{16}$$

$$\overset{\text{def}}{=} z \cdot (b \mapsto (u \mapsto b \cdot h(u))) = z \cdot \hat{h} \,. \tag{17}$$

- Si $l \in L$ alors $\tilde{l} \in H$.

$$\begin{aligned} \tilde{l}(a \cdot u) = l(1)(a \cdot u) \overset{\text{morph A}}{=} l(1 \cdot a)(u) \\ = l(a \cdot 1)(u) \overset{\text{morph B}}{=} a \cdot l(1)(u) = (a \cdot \tilde{l})(u) \,. \end{aligned} \tag{18}$$

- $\tilde{\cdot}$ est un Z-morphisme.

$$\widetilde{z \cdot l} = u \mapsto (z \cdot l)(1)(u) \tag{19}$$

$$\overset{\text{def}}{=} u \mapsto l(1z)(u) \tag{20}$$

$$= u \mapsto l(z \cdot 1)(u) \tag{21}$$

$$\overset{\text{morph}}{=} z \cdot (u \mapsto l(1)(u)) = z \cdot \tilde{l} \tag{22}$$

- Pour tout $h \in H$, on a l'égalité $\tilde{\hat{h}} = h$.

$$\tilde{\hat{h}} = b \mapsto (\widetilde{u \mapsto b} \cdot h(u)) = u \mapsto 1 \cdot h(u) = h \tag{23}$$

- Pour tout $l \in L$, on a l'égalité $\hat{\hat{l}} = l$.

$$\hat{\hat{l}} = u \mapsto \widehat{l(1)}(u) \tag{24}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} b \mapsto (u \mapsto b \cdot l(1)(u)) \tag{25}$$
$$\stackrel{\text{morph}}{=} b \mapsto u \mapsto l(b)(u) = l\,. \qquad \square$$

Proposition 1.6. *Si A et B sont semi-simple et si U et V sont des modules simples, alors le Z-module L est simple. Par conséquent H est aussi simple.*

Démonstration. Soit $f, g \in H$ deux éléments non nuls. On veut trouver un $z \in Z$ que $z \cdot f = g$. Les modules U et V étant simple, le module $\mathcal{L}(U, V)$ est simple sur $B \otimes_k A$. En particulier, comme les morphismes f et g sont non nuls, ils sont surjectifs. On peut donc trouver un $b \in B$ tel que $g(b) = f(1)$. **To Do : Question : est-ce que $b \in Z$?** $\square$

Théorème 1.7 (Critère de Gelfand)**.** *B est sans multiplicité sur A si et seulement si $Z(B, A)$ est commutatif.*

Démonstration. Supposons B sans multiplicité sur A. **To Do :**

Inversement, supposons que $Z(B, A)$ est commutatif. On a montré que pour tout U, V simples, l'espace $\mathrm{Hom}_A(U, \mathrm{Res}_A^B V)$ est un Z-module simple, il est donc de dimension 1. $\square$

2. Centre et application du critère de Gelfand

2.1. **Le centre d'une algèbre de groupe.** Rappel sur l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$.

Lemme 2.1. *Si $c \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ alors c agit par un scalaire sur toute les représentations.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme de Schur. $\square$

Lemme 2.2. *L'application $f \mapsto \sum_g f(g^{-1})g$ est un isomorphisme linéaire des fonctions centrales dans $\mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$.*

Proposition 2.3 (Caractère et centre)**.** *Soit (ρ, V) une représentations et f une fonction centrale. Alors*

$$\mathrm{Tr}_V\left(\sum_g f(g^{-1})g\right) = |G|\langle f \mid \chi_\rho\rangle\,. \tag{26}$$

En particulier les caractères irréductibles sont à un scalaire près les idempotents centraux :

Proposition 2.4 (Caractère irréductible et idempotents centraux)**.** *Soit (ρ, V) et (η, W) deux représentations irréductibles. On pose $e_\rho := \frac{\chi_\rho(1)}{|G|} z(\rho)$.*
- *si ρ et η ne sont pas isomorphes alors e_ρ agit par 0 sur W.*
- *si ρ et η sont isomorphes alors e_ρ agit par 1 sur W.*

Par conséquent e_ρ est un idempotent tel que pour toute représentation (η, W), l'espace $\eta(e_\rho)(W)$ est la composante isotypique associée à ρ de W.

Note 2.5. Interprétation à la lumière de Wederburn :

$$\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{\rho\in\hat{G}} M_{\dim\rho}(\mathbb{C}) \tag{27}$$

Les idempotents centraux sont les identités des $M_{\dim\rho}(\mathbb{C})$.

Why do we care ?

Corollaire 2.6. *Les composantes isotypiques sont canoniques et ne dépende pas de la décomposition choisie.*

2.2. **Graphe de branchement et base de Gelfand-Tzetlin.** Voir section 1 article Vershik-Okounkov.

Définition 2.7 (Graphe de branchement (diagramme de Bratelli) d'une chaine de groupe)**.**

$$G_0 = \{1\} \subset G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots \tag{28}$$

Multi-graphe gradué :
— les sommets de degré n sont les $\lambda \in \hat{G_n}$.
— pour $\lambda \in \hat{G_n}$ et $\mu \in \hat{G_{n+1}}$ le nombre d'arètes entre λ et μ est égale à $\dim \operatorname{Hom}(V_\lambda, \operatorname{Res}_n^{n+1} V_\mu)$.

Proposition 2.8. *Pour toute irrep* (λ, V)*, alors* $\dim(V)$ *est le nombre de chemin de* 0 *à* λ *dans le graphe de branchement.*

Si la chaîne est sans multiplicité, le multigraphe est un graphe. Comme la décomposition en isotypique est canonique, on obtient une décomposition canonique de V_λ en droites. À des scalaires près on obtient une base canonique de V_λ qui est appelée la base de Gelfand-Tzetlin.

Définition 2.9. Algèbres de Gelfand-Tzetlin GZ_n sous algèbre $\mathbb{C}G_n$ engendrée par les $\mathrm{Z}(\mathbb{C}G_i)$ pour $i \leq n$.

C'est une sous-algèbre commutative de $\mathbb{C}G_n$ (en fait elle est maximale).
D'où l'intérêt du critère de Gelfand.

2.3. **Le cas des groupes symétriques.** La chaînes des groupes symétriques est sans multiplicités :

Théorème 2.10. *L'algèbre* $\mathrm{Z}_{n-1,n} := \mathrm{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1})$ *est commutative.*

Lemme 2.11. *Tout élément de* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *est conjugué à son inverse* σ^{-1} *par un élément de* $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Pour $x = \sum_g x_g g \in \mathbb{C}G$ notons $x^* := \sum_g x_g g^{-1}$. C'est un anti-isomorphisme d'algèbre.

Lemme 2.12. *Pour* $c \in \mathrm{Z}_{n-1,n}$*, on a* $c^* = c$.

Démonstration du théorème. Si $a, b \in \mathrm{Z}_{n-1,n}$ alors

$$(a-ib)(a+ib) = (a^*-ib^*)(a^*+ib^*) = ((a-ib)(a+ib))^* = (a+ib)(a-ib) \tag{29}$$

On en déduit que $ab = ba$. □

Ce qu'il faut maintenant faire : Décrire $\mathrm{Z}_{n-1,n}$ et l'algèbre de Gelfand-Tzetlin des groupes symétrique.

2.4. **Éléments de Jucis-Murphy.** La somme de toute les transpositions $\sum_{i<j\leq n}(i,j)$ est un élément du centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Par conséquent, l'élément de Jucis-Murphy défini par

$$X_n := \sum_{i<n}(i,n) = \sum_{i<j\leq n}(i,j) - \sum_{i<j\leq n-1}(i,j) \tag{30}$$

est un élément de $\mathrm{Z}_{n-1,n}$ et de $GZ(n)$. En particulier, les $(X_i)_{i\leq n}$ commutent.

Théorème 2.13.

$$\mathrm{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) \subset \langle \mathrm{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}), X_n \rangle \tag{31}$$

Démonstration. A détailler dans une autre séance. Relier au fait que les fonctions puissances engendrent les polynômes symétriques. □

Corollaire 2.14. *L'algèbre de Gelfand-Tzetlin est engendré par les éléments de Jucis-Murphy :*

$$GZ_n = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle . \tag{32}$$

Théorème 2.15. $\mathrm{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}) = \langle \mathrm{Z}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_{n-1}), X_n \rangle$.