Les secrets du nombre π

Vincent Pilaud

Octobre 2004

1 Définitions

Nous connaissons le nombre π depuis les petites classes quand nos maîtres et maîtresses nous faisaient calculer le périmètre ou l'aire d'un cercle à partir de son rayon. Nous utilisons π dans les calculs de volume, dans la mesure des angles, et dans toutes autres sortes de problèmes géométriques. Mais comment définir le nombre π ?

L'idée la plus naturelle est d'utiliser une définition géométrique de π. On peut par exemple définir le nombre π comme le rapport entre le périmètre p et le diamètre D d'un cercle :

$$\pi = \frac{p}{D}$$

Mais il faut alors introduire la notion de mesure du périmètre (savoir calculer la longueur d'une courbe requiert l'introduction de l'intégrale curviligne), ce qui demande des notions géométriques difficiles. Par ailleurs, il faudra démontrer que ce rapport est bien indépendant du cercle considéré, démonstration qui fait appel aux mesures de longueur une nouvelle fois. De la même façon, une définition du nombre π avec l'aire d'un cercle, le volume d'une boule ou toute autre notion géométrique ne peut pas être envisagée sans l'introduction d'outils géométriques complexes.

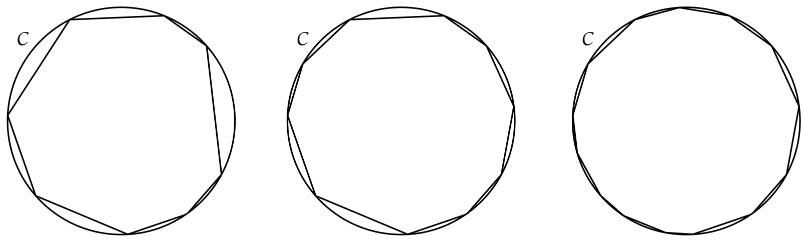
Le plus simple reste alors d'utiliser des notions d'analyse. Mais où trouver π dans les fonctions ? La réponse vient presque naturellement : les fonctions trigonométriques. π est partout quand on parle de cosinus ou de sinus. Par exemple, on peut définir π comme le double de la première racine positive de la fonction cosinus. Or le cosinus est la fonction définie par

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

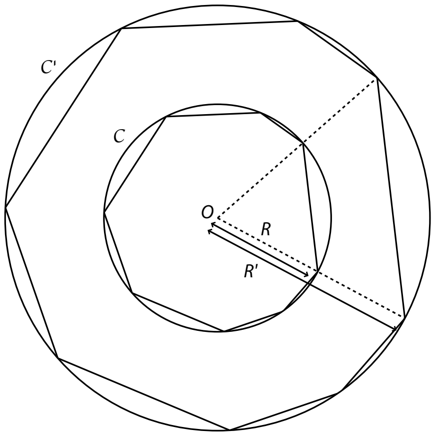
et la fonction exponentielle se définit facilement comme série entière (ceci dépasse un peu notre niveau, mais nous savons désormais qu'une telle définition existe).

On obtient de cette manière une définition rigoureuse du nombre π, mais ce nombre ne semble plus en rapport avec la géométrie. Pour refaire le lien, il faut se placer dans un espace euclidien, qui vérifie le théorème de Thalès, et redémontrer nos résultats géométriques à partir du cercle trigonométrique. Nous ne ferrons pas toutes ces démonstrations ici, ayant bien compris que nos connaissances sur le nombre π demandent encore beaucoup de travail, mais pour satisfaire notre curiosité, nous alons démontrer que le rapport du périmètre d'un cercle par son rayon est indépendant du cercle considéré.

Pour cela, comme nous l'avons fait remarqué, il faut d'abord définir le périmètre d'un cercle. Nous savons mesurer les segments de droite, et donc par suite le périmètre des polygones. Le périmètre d'un cercle $\mathcal{C}$ sera la borne supérieure du périmètre des polygones simples (i.e. dont deux cotés quelconques ne s'intersectent pas) qui ont le cercle $\mathcal{C}$ pour cercle circonscrit.



Ici encore, nous ne démontrons pas tout, puisque nous admettons l'existence de cette borne supérieure. Cependant, nous pouvons maintenant montrer le résultat recherché sous l'hypothèse du théorème de Thalès. En effet, considérons deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de rayons respectifs R et R'. On peut supposer qu'ils ont même centre O. Considérons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polygones simples de cercle circonscrit $\mathcal{C}$ dont le périmètre tend vers le périmètre p du cercle $\mathcal{C}$.



Considérons la suite $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polygones simples de cercle circonscrit $\mathcal{C}'$ obtenus par homothétie de centre O et de rapport $\frac{R'}{R}$ des polygones P_n. Le théorème de Thalès assure que les périmètres des polygones P'_n sont les produit du rapport $\frac{R'}{R}$ de l'homothétie par les périmètres des polygones P_n. Par conséquent, et par définition de la borne supérieure, on obtient que l'inégalité entre les périmètres p et p' des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

$$p' \geq \frac{R'}{R}p.$$

Le problème étant symétrique, on obtient en fait une égalité, ce qui montre le résultat.

2 Approximations

2.1 Les méthodes probabilistes

2.1.1 La méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo se base sur la remarque suivante : si on choisit au hasard un couple (x, y) dans $[0,1]^2$, il a une probabilité de $\frac{\pi}{4}$ de se trouver dans le demi-cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, c'est-à-dire de vérifier l'équation $x^2 + y^2 \leq 1$.

On choisit donc au hasard un très grand nombre N de couples (x_n, y_n) et on compte le nombre M de couples (x_n, y_n) qui vérifient l'équation $x_n^2 + y_n^2 \leq 1$. On a alors une estimation de π par le rapport $\frac{4M}{N}$.

Ecrivons un algorithme mettant en oeuvre cette méthode :

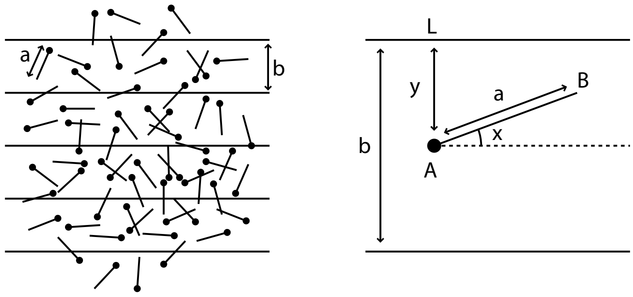
Monte-Carlo(N)=
  $M \leftarrow 0$;
  POUR $(i = 1)$ JUSQU'À (N) FAIRE
    $x \leftarrow$ RAND ; $y \leftarrow$ RAND ;SI $(x^2 + y^2 < 1;)$ ALORS $(M \leftarrow M + 1;)$ SINON () FSI ;
  FPOUR ;
  $4M/N \rightarrow$; ;

On pourra programmer cet algorithme sur une calculatrice et se rendre compte que cette méthode n'est pas très efficace.

2.1.2 Les aiguilles de Buffon

Considérons une aiguille de longueur a et un parquet dont les lattes sont de largeur b. Nous allons montrer dans ce qui suit que la probabilité que cette aiguille lancée sur ce parquet rencontre le bord d'une latte est égale à $\frac{2a}{\pi b}$. Il suffira alors de lancer un très grand nombre N d'aiguilles sur le parquet et de compter le nombre M d'aiguilles qui rencontrent le bord d'une latte. On aura alors une estimation de π par le rapport $\frac{2Na}{Mb}$.

Notons que cette méthode est très mauvaise. À titre d'exemple, en 1950, Wolf lance 5000 aiguilles avec un rapport $\frac{a}{b} = 0,8$ et trouve 2532 intersections. Il en déduit l'approximation $3,1596$.



Démontrons maintenant ce résultat. Considérons une aiguille comme sur la figure ci-dessus. Lancer l'aiguille au hasard revient à choisir deux nombres au hasard :

– l'angle x que fait l'aiguille avec la verticale qui varie entre 0 et π,

– la distance y de l'extremité A de l'aiguille à la latte L qui varie entre 0 et b.

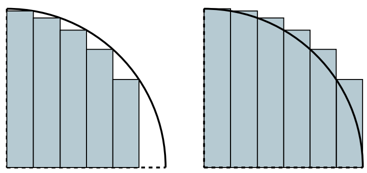
L'aiguille rencontre le bord d'une latte si on a la relation $y < a \sin x$. Pour trouver la probabilité que l'aiguille rencontre le bord d'une latte, il suffit alors de faire le rapport de l'aire du domaine $\Delta_1 = \{(x, y) \in [0, \pi] \times [0, b] \mid y < a \sin x\}$ par celle du domaine $\Delta_2 = [0, \pi] \times [0, b]$. On obtient

$$P = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\int_0^\pi a \sin x dx}{\pi b} = \frac{-a \cos \pi + a \cos 0}{\pi b} = \boxed{\frac{2a}{\pi b}}$$

2.2 Les méthodes géométriques

2.2.1 Rectangles

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. Pour trouver une approximation de π, on va calculer un encadrement de l'aire du cercle $\mathcal{C}$ avec des rectangles. Plus précisément, pour tout entier naturel n, en considérant les rectangles de la figure suivante,



on a l'encadrement

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2},$$

d'où l'on déduit que

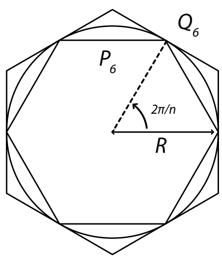
$$\boxed{\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}}$$

Calculons quelques termes :

n	2	3	4	...	25	...	50
$\frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$	1,7321	2,2509	2,4957	...	3,0522	...	3,0983

2.2.2 Polygones réguliers

Pour tout entier naturel n, on considère deux polygones réguliers à n côtés P_n et Q_n tels que le cercle circonscrit à P_n soit le cercle inscrit dans Q_n. On appelle R le rayon de ce cercle.



On obtient l'encadrement

$$\frac{n}{2}R^2\sin(\frac{2\pi}{n}) \leq \pi R^2 \leq \frac{n}{2}\left(\frac{R}{\cos(\frac{\pi}{n})}\right)^2\sin(\frac{2\pi}{n}),$$

d'où l'on déduit que

$$\boxed{\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin(\frac{2\pi}{n})}$$

Il reste alors à savoir calculer rapidement les $\sin(\frac{2\pi}{n})$. Dans le cas général, ce n'est pas évident, mais il suffit de choisir convenablement les entiers n pour lesquels on va évaluer cette expression. En effet, on sait que pour tout entier k,

$$\sin(\frac{2\pi}{2^k}) = \sqrt{1-(\cos(\frac{\pi}{2^{k-1}}))^2},$$

donc il nous suffit de savoir calculer rapidement les $\cos(\frac{\pi}{2^{k-1}})$ que l'on trouve par récurrence par la formule

$$\cos(\frac{\pi}{2^k}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^{k-1}})}{2}}.$$

Ce petit calcul permet d'obtenir rapidement les résultats suivants :

k	2	3	4	...	12
$\cos(\frac{\pi}{2^{k-1}})$	0	0.70711	0.92388	...	0.99999882
$\frac{2^k}{2}\sin(\frac{2\pi}{2^k})$	2	2.82843	3.06147	...	3.141591

Il faut aller jusqu'à $n = 2^{12} = 4096$ pour avoir une approximation à 5 chiffres significatifs.

2.3 Les méthodes analytiques

2.3.1 Par développements limités

Il existe de nombreuses formules sur π qui proviennent de l'analyse que nous ne pouvons pas encore démontrer (des connaissances sur les développements limités sont indispensables). La plus connue est sans doute la suivante.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Pour un entier n assez grand, on obtient donc une bonne approximation de π en calculant $\sqrt{6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}$.
Calculons quelques termes :

n	2	3	4	...	25	...	50
$\sqrt{6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}$		2,8577	2,9226	...	3,1039	...	3,1226

On pourra montrer une autre égalité qui s'obtient à partir de celle-ci :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2.3.2 Arctangentes

Cette méthode de calcul se base sur notre constat de départ : certes on trouve le nombre π dans la géométrie, mais il apparaît aussi dans la trigonométrie. Partons d'une formule simple et bien connue

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

(si on ne se rappelle plus de cette formule, ou que l'on préfère ne pas accorder une confiance aveugle à sa mémoire, on se rappelle des deux formules

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \text{ et } \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b,$$

que l'on applique au calcul de notre tangente

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b})$$

On calcule maintenant, pour tous entiers naturels n et p,

$$\tan(\arctan \frac{1}{n+p} + \arctan \frac{p}{n^2+np+1}) = \frac{\tan(\arctan \frac{1}{n+p}) + \tan(\arctan \frac{p}{n^2+np+1})}{1 - \tan(\arctan \frac{1}{n+p}) \tan(\arctan \frac{p}{n^2+np+1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{n+p} + \frac{p}{n^2+np+1}}{1 - \frac{1}{n+p}\frac{p}{n^2+np+1}} = \frac{n^2+np+1+np+p^2}{n^3+n^2p+n+n^2p+np^2+p-p} = \frac{1}{n},$$

d'où on déduit que

$$\boxed{\arctan \frac{1}{n} = \arctan \frac{1}{n+p} + \arctan \frac{p}{n^2+np+1}}$$

et en particulier que

$$\arctan \frac{1}{n} = \arctan \frac{1}{n+1} + \arctan \frac{1}{n^2+n+1}.$$

Cette relation permet d'obtenir des relations du type

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{1} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \dots$$

Or on sait calculer facilement la valeur des arctan avec des développements limités. On obtient ainsi une méthode beaucoup plus rapide pour trouver une approximation de π.

3 Constructibilité

Depuis l'antiquité, les mathématiciens se sont beaucoup questionnés sur le problème de la quadrature du cercle : est-il possible de construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné ?

De nombreux mathématiciens et amateurs se sont heurtés à ce problème, certains trouvant des constructions approchées qu'ils prétendaient exactes, si bien qu'en 1775, l'académie des sciences de Paris prend la décision de ne plus examiner les prétendues preuves de cette fameuse quadrature du cercle.

La réponse définitive est donné en 1882 par Ferdinand von Lindemann qui démontre que le nombre π est transcendant, et donc qu'il n'est pas constructible (cf. Constructions géométriques). La preuve de ce résultat serait un peu laborieuse, mais est disponible dans de nombreux ouvrages de théorie des nombres.

Ce texte est largement inspiré du merveilleux livre de Jean-Paul Delahaye intitulé *Le fascinant nombre* π que l'on recommande de consulter pour plus d'informations sur le sujet.