physique 2 et 3

Claude

19 mars et 9 avril 2004

Remarque : Pour des raisons purement techniques, les vecteurs seront notés en gras et non avec une petite flèche.

Première partie
ordres de grandeur

1 saut à la perche

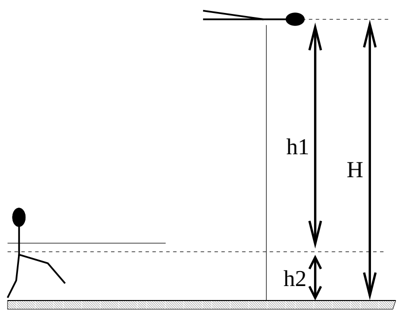
Quelle est à peu près la taille maximale d'un saut à la perche ?

Le saut à la perche c'est de la conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur. Dans un modèle assez grossier nous allons négliger les frottements et le travail des forces intérieures du perchiste.

Juste avant le saut, le perchiste court à une vitesse $v \simeq 10m.s^{-1}$. $E_c = \frac{mv^2}{2}$ L'énergie potentielle de pesanteur à la hauteur h_1 est $E_p = mgh_1$. Au maximum de hauteur, $v \simeq 0$. Donc $E_p = E_c$, c'est-à-dire $gmh_1 = \frac{mv^2}{2}$. D'où $h_1 = \frac{v^2}{2g}$.

Mais le centre de gravité du perchiste pendant la course est à $h_2 \simeq 1m$, alors qu'au passage de la barre il est couché.

Donc $h_{total} = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + h_2 \simeq \frac{10^2}{10*2} + 1 = 6m$



Or le record mondial est détenu par Sergey Bubka avec 6m14 en plein air en 1994, et 6m15 en intérieur en 1993.

2 taille des montagnes

2.1 considérations simples

On va seulement chercher ici une borne supérieure H_{max} à la taille des montagnes. Pour simplifier, on va supposer que la tectonique des plaques n'est pas limitée, et nous n'allons pas du tout parler de l'érosion. Nous allons aussi simplifier la forme de la montagne en un cylindre.

On ne va pas non plus étudier de complexes mécanismes. On va se limiter à des considérations énergétiques très simples.

Si une montagne s'enfonce, elle va perdre de l'énergie potentielle, mais il va falloir de l'énergie pour que quelque part de la roche fonde pour permettre à la montagne de s'enfoncer.

La borne de hauteur que l'on cherche est telle que l'energie potentielle perdue soit égale à l'énergie de liquéfaction. Si l'énergie de liquéfaction est plus grande que l'énergie potentielle, la montagne ne pourra pas s'enfoncer. Si c'est le contraire, la montagne va forcément s'enfoncer et donc la hauteur diminuer, jusqu'à cette hauteur H_{max} que l'on cherche.

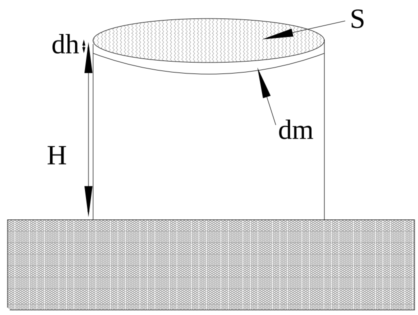
2.2 parenthèse sur la chaleur de liquéfaction

Un corps peut être sous différentes phase. Par exemple H_2O peut-être sous forme gazeuse (vapeur), sous forme liquide (eau), sous forme solide (glace).

Pour les corps purs ces phases sont bien distinctes et on passe de l'une à l'autre à des températures et des pressions bien déterminées. (contrairement à un plastique qui chauffé va devenir progressivement mou).

Dans l'état solide les molécules sont bien rangées et très liées. Pour casser ces liaisons et instaurer le désordre d'une phase liquide, il faut de l'énergie. La température reste constante au cours du changment de phase, il n'y a donc pas de capacités calorifiques qui rentrent en jeu. On appelle l'énergie qu'il faut fournir la “chaleur latente”, ici chaleur latente de fusion L_f.

2.3 retour à notre problème



Soit ρ la masse volumique de la roche.
Soit S la section du cylindre.
Soit H la hauteur de la montagne.
Lorsque la montagne s'enfonce de dH, l'énergiepotentielle varie :
$dE_p = gHdm = \rho SgHdh$
Soit l la chaleur latente de fusion par unité de masse.
$dE = ldm$
Pour H limite, $dE_p = dE$
Donc $gHdm = ldm$
$H = \frac{l}{g}$
Pour les roches, l est typiquement de 80 calories par gramme, c'est-à-dire $80 * 4.18$ joules par gramme, ou encore $80 * 4.18 * 1000$ joules par kilogramme.
g est sur terre d'environ 10 Newton par kilogramme.
$H_{max} = \frac{80*4.18*1000}{10} \simeq 30 kilomtres$

2.4 critiques

- la forme d'une montagne réelle est assez loin de celle du cylindre
- on a 'oublié' beaucoup de choses, comme l'érosion
- on a considéré que la montagne était homogène

Mais malgré la rusticité de ce modèle on trouve le bon ordre de grandeur (30 km au lieu de 8 ce n'est pas comme si on avait trouvé 500km ou 500m)

3 nombre de rameurs et vitesse

3.1 petite parenthèse sur les puissances fractionnelles

Vous êtes habitués aux puissances entières (par exemple x^2). Mais on peut aussi utiliser des puissances fractionnelles, telles que $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$. C'est-à-dire que par exemple l'équation $x^3 = y$ peut aussi s'écrire $x = y^{\frac{1}{3}}$.

3.2 problème

Dans les courses d'aviron il y a plus ou moins de rameurs sur un même bateau. On peut s'attendre à ce que la vitesse maximale augmente avec le nombre de rameurs. Mais la question qu'on va se poser est l'importance de cette augmentation. Par exemple si on multiplie le nombre de rameurs par 4, de combien va-t-on multiplier la vitesse ? Par 2, 4, 16 ? Pour cela, on va chercher la relation qui lie nombre de rameurs et vitesse. On veut obtenir quelque chose du type :
$vitesse = nombre^p$
Lorsqu'on a 4 fois plus de rameurs,
on multiplie par 16 la vitesse si p=2
on multiplie par 4 la vitesse si p=1
on multiplie par 2 la vitesse si $p = \frac{1}{2}$.

quelques notations :

$\propto$ signifie "proportionnel à".

L est une longueur caractéristiques du bateau. Le volume du bateau est proportionnel à L^3 et la surface de frottement va être proportionnelle à L^2.

m est la masse d'un rameur et P_0 la puissance qu'il fournit.

n est le nombre de rameurs.

v est la vitesse du bateau.

ρ est la masse volumique de l'eau.

Qu'est-ce qui fait que le bateau flotte ?

La force d'Archimède contrebalance le poids.

$A = V\rho_{eau}g$, avec V le volume immergé du bateau et ρ_{eau} la masse volumique de l'eau. $A \propto L^3\rho_{eau}g$

Le poids du bateau est principalement celui des rameurs : $P = nmg$.

On a équilibre pour A=P, c'est-à-dire $L^3\rho_{eau}g \propto nmg$, d'où $L^3 proportionnel \frac{nm}{\rho_{eau}}$, ce qui peut aussi s'écrire $L \propto (\frac{nm}{\rho_{eau}})^{\frac{1}{3}}$.

Que se passe-t-il lorsque le bateau est à sa vitesse maximale ?

Les forces de frottements compensent la force fournie par les rameurs.

La force de frottement dûe à l'eau est dans ce cas (ce n'est pas général) $F_{frot} \propto \rho_{eau}v^2L^2$.

Une force, c'est $\frac{travail}{longueur}$. Or $travail = puissance * temps$. Donc $F_{rameurs} = n\frac{P_0}{v}$.

$F_frot = F_rameurs$

$\rho_{eau}v^2L^2 \propto n * \frac{P_0}{v}$

on remplace dans cette expression L par ce que l'on a obtenu avec la poussée d'Archimède : $\rho_{eau}v^2(\frac{nm}{\rho_{eau}})^{\frac{2}{3}} \propto n\frac{P_0}{v}$

$v^3 \propto n^{\frac{1}{3}}\frac{P_0m^{\frac{2}{3}}}{\rho_{eau}^{\frac{1}{3}}}$

D'où finalement v $\propto$ n$^{\frac{1}{9}}$.

Concrètement cela veut dire que la vitesse augmente très peu avec le nombre de rameurs. Pour doubler la vitesse il faudrait 2^9 fois plus de rameurs. C'est-à-dire que 512 rameurs vont seulement 2 fois plus vite que 1 rameur !

Ce modèle a bien sûr ses limites.

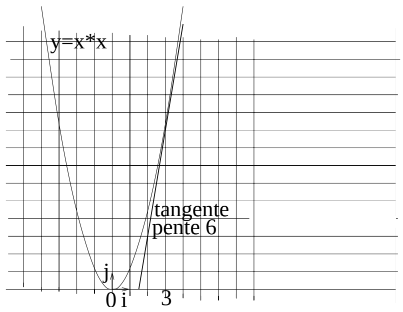
Deuxième partie

quelques outils nécessaires à la suite

4 notation dérivée

4.1 dérivée par rapport à une variable

Vous avez vu en classe la dérivation avec la notation $f'(x)$ pour la dérivée d'une fonction f de x. On a par exemple si $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. Cela mesure la variation de la courbe en ce point. La dérivée donne la pente de la tangente au point calculé. (Par exemple pour la fonction définie précedemment, au point x=3, la pente de la tangente est $2 * 3 = 6$)



Mais souvent une fonction ne dépend pas que d'une seule chose. Prenons par exemple la loi des gaz parfaits : $P = \frac{nRT}{V}$. Si on diminue le volume V, on augmente la pression P (par exemple on écrase un sac de chips pour que la pression augmente et que la fermeture cède). Si on diminue le nombre de particules on diminue la pression (comme un pneu crevé qui a perdu une grande partie du gaz contenu et est tout mou). Pour étudier cette variation avec plus de précision on peut vouloir dériver la fonction pression en fonction des variables n ou V.

Prenons une autre fonction : $g(x,t) = x * t + x^2 + 3t + 4$ On peut choisir de la dériver selon x ou selon t. Mais avec la notation "g'", on ne peut pas savoir par rapport à quoi on a dérivé. D'où une nouvelle notation :
- $\frac{dg}{dx} = t + 2x$
- $\frac{dg}{dt} = x + 3$

4.2 dérivée d'un vecteur

On peut imaginer une fonction qui à t associe un point de l'espace. C'est-à-dire : **vecteur** $= f(t)\mathbf{u_x} + g(t)\mathbf{u_y} + h(t)\mathbf{u_z}$.

On a alors : $\frac{d\mathbf{vecteur}}{dt} = \frac{df(t)}{dt} * \mathbf{u_x} + \frac{dg(t)}{dt}\mathbf{u_y} + \frac{dh(t)}{dt} * \mathbf{u_z}$
C'est-à-dire qu'on dérive composante par composante.

5 accélération, vitesse et vecteur position

Soit M la position du solide étudié. Soit O un point fixe que l'on choisi. **OM** est le vecteur position. $\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \mathbf{v}$. La vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

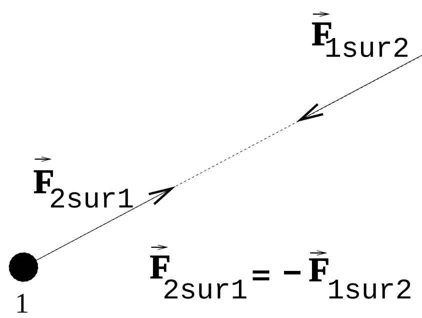
L'accélération c'est la variation de la vitesse dans le temps et donc la dérivée de la vitesse par rapport au temps. $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$. C'est par conséquent le résultat de 2 dérivations successives du vecteur position par rapport au temps, ce qui se note :
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}$.

6 lois de Newton

6.1 1ière et 3ième lois

La première définit ce qu'est un référentiel galiléen (un référentiel dans lequel un solide soumis à des forces dont la somme vectorielle est nulle est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme).

La troisième est le principe des actions réciproques : la force appliquée de 1 sur 2 est l'opposé de la force appliquée de 2 sur 1.



6.2 2ième loi

Dans un référentiel galiléen, la variation de la vitesse d'un solide est proportionnelle à la somme des forces qu'on lui applique.

C'est à dire que $constante * \frac{d\mathbf{vitesse}}{dt} = sommedes\mathbf{forces}$.

Vous avez sans doute déjà remarqué que pousser un caddie vide demande moins de force que pousser un caddie plein. C'est donc que la constante est proportionnelle à la masse.

De fait, on a : $sommedes\mathbf{forces} = masse * \frac{d\mathbf{vitesse}}{dt} = masse * \mathbf{accélération} = masse * \frac{d^2\mathbf{position}}{dt}$

Ce qui donne si le problème n'est que sur une dimension (c'est-à-dire si le solide se déplace sur une droite, avec pour coordonnée x) : somme des forces algébriques selon $x = masse * \frac{dv_x}{dt} = masse * a_x = masse * \frac{d^2x}{dt^2}$

7 pour un solide en rotation

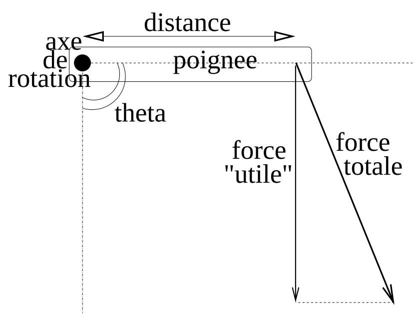
C'est trop long à expliquer. Je le présente uniquement car j'en ai besoin dans ce problème.

Pour un solide en rotation, la deuxième loi de Newton peut s'écrire $sommeM = J * \frac{d\omega}{dt} = J*$variation de $\omega = J * \frac{d^2\theta}{dt}$

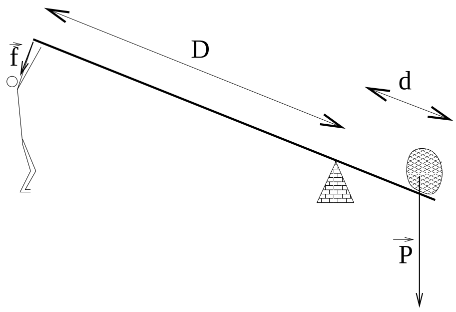
Il faut faire des analogies.

θ est un angle qui mesure la rotation. $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, c'est-à-dire que ω est la vitesse angulaire de rotation.

J est comme la masse (en fait c'est une quantité qui lie masse et éloignement de cette masse par rapport à l'axe de rotation).



M est ce que l'on appelle le moment d'une force. Il est le produit d'une composante de la force (perpendiculaire à l'axe de rotation et perpendiculaire à ce qui relie le point d'application de la force à l'axe) et de la distance entre le point d'application de la force et l'axe de rotation. Prenons par exemple une poignée de porte. pour ouvrir la porte vous n'allez pas essayer d'étirer la poignée, ni de la tirer vers vous. La force que vous appliquer est selon la bonne direction (perpendiculaire à l'axe de rotation et perpendiculaire à ce qui relie le point d'application de la force à l'axe). Et il faut moins de force pour faire tourner la poignée loin de l'axe de rotation. C'est le principe du levier qui permet avec une petite force de soulever de gros poids.



Troisième partie
tartine

8 description du phénomène

Vous êtes tranquillement en train de prendre votre petit déjeuner. Vous reposez une tartine beurrée sur la table, mais sans faire trop attention car vous n'avez pas les yeux ouverts ; la voilà qui tombe, et du côté beurre en plus ! Pourquoi donc ces satanés tartines tombent-elles du côté beurre ?

9 modélisation

On se met dans une situation assez particulière où la tartine tombe pour avoir été posée légèrement pas assez sur la table, c'est-à-dire avec son centre de gravité pas au-dessus de la table. On va noter δ la distance entre le centre de gravité et le rebord de la table.

On va supposer que la tartine est homogène et peu épaisse. On peut simplifier sa forme en un rectangle (de longueur 2a perpendiculairement au rebord de la table) ou en un disque (de rayon a).

On peut distinguer 2 phases dans le mouvement de la tartine :
- la tartine bascule. Le rebord de la table joue le rôle d'axe de rotation
- la tartine quitte la table. Son centre de gravité a un mouvement de chute libre mais elle garde la rotation acquise au cours du basculement

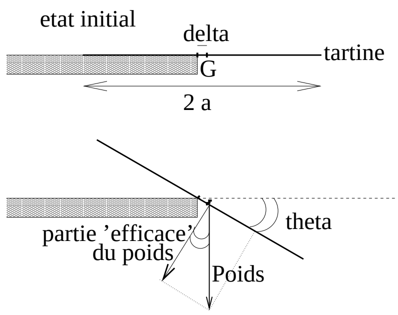
10 résolution

10.1 première phase

On va étudier la rotation de la tartine, de vitesse initiale nulle. On a : $J\frac{d^2\theta}{dt^2} = M_{poids}$

(deuxième loi de newton)

$M_poids = mg\delta\cos\theta$



En effet seule la composante "efficace" du poids agit sur la rotation, et est de norme $mg\cos\theta$. Et son point d'application est à une distance δ du rebord de la table.

Et en supposant que $\delta \ll a$, $J = \frac{ma^2}{3}$ pour le rectangle et $J = \frac{ma^2}{4}$ pour le disque. [1]

En prenant le cas du rectangle on obtient après simplification :

$\frac{a^2}{3}\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\delta\cos\theta$

En intégrant ce résultat on obtient :

$(\frac{d\theta}{dt})^2 = \frac{6g\delta\sin\theta}{a^2}$

On vérifie qu'en dérivant cette expression par rapport au temps on retrouve bien l'équation précédente.

En effet comme $(f^2)' = 2f' * f'$, $\frac{d((\frac{d\theta}{dt})^2)}{dt} = 2 * \frac{d\theta}{dt} * \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Et on a $\frac{d\sin\theta}{dt} = \cos\theta * \frac{d\theta}{dt}$

Puis on simplifie.

Quand la tartine quitte la table, $\theta = \frac{\Pi}{2}$. On a donc $\sin\theta = 1$ Et par conséquent $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{6g\delta}{a^2}}$

10.2 seconde phase

Étudions le mouvement du centre de gravité. Il est à peu près à z=0 à t=0 (on décide de placer l'origine des temps au moment où la tartine quitte la table). La seule force qui s'exerce sur la tartine (on néglige le frottement de l'air) est son poids. On obtient donc avec la deuxième loi de Newton :

$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg$, qui se simplifie en $\frac{d^2z}{dt^2} = g$

En intègrant une première fois (on peut vérifier que le résultat obtenu dérivé par rapport au temps redonne l'équation précédente) :

$\frac{dz}{dt} = gt + constante_1$

$constante_1 = 0$ car à t=0, la vitesse du centre de gravité est nulle.

[1] c'est un résultat que je vous donne car c'est trop long à expliquer

En intègrant une deuxième fois (on peut vérifier que le résultat obtenu dérivé par rapport au temps redonne l'équation précédente) :

$z = \frac{gt^2}{2} + constante_2$ $\quad constante_2 = 0$ car à t=0, z=0.

Donc soit τ la temps de la chute, $h = \frac{g\tau^2}{2}$, et donc $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Pendant la chute, la tartine a continué à tourner avec la vitesse angulaire calculée précédemment. À t=0 on avait $\theta = \frac{\Pi}{2}$.

Et donc $\theta_{final} = \frac{\Pi}{2} + \tau(\frac{d\theta}{dt})$

$\theta_{final} = \frac{\Pi}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g}} * \sqrt{\frac{6g\delta}{a^2}} = \frac{\Pi}{2} + \sqrt{\frac{12h\delta}{a^2}}$

11 application numérique

en prenant h=1m, a=5cm et $\delta = 3mm$ on obtient $\theta_{final} \simeq \Pi$. La tartine tombe bien côté beurre.

12 critiques

δ est quelque chose de très variable.

Et il y a sans doute d'autres situations à considérer que celle où on repose mal la tartine...

Quatrième partie
jeux de balle

13 présentation du problème

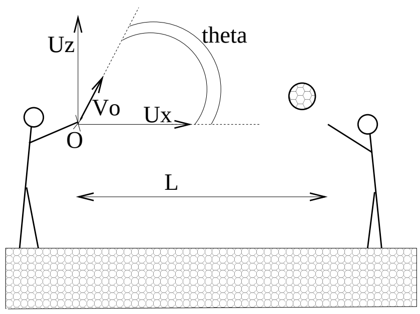
2 joueurs de basket veulent se passer le ballon en étant le plus loin possible. On suppose que la vitesse maximale v_0 avec laquelle ils peuvent lancer le ballon est indépendante de la direction dans laquelle ils le font. Le seul paramètre sur lequel ils peuvent jouer est l'angle de lancer. Quel est l'angle optimum ?

14 résolution

À t=0, le ballon au point 0 (0,0,0) est lancé avec une vitesse de module v_0 et d'angle θ avec l'horizontale.

On néglige les frottements. Donc la seule force qui agit sur lui est son poids, $\mathbf{P} = -mg\mathbf{u_z}$. En appliquant la deuxième loi de Newton dans les 3 directions de l'espace et en simplifiant par m on obtient :

$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$



$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$
$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$

En intégrant on obtient (vérifier qu'en dérivant on retrouve bien l'équation précédente) :

$\frac{dx}{dt} = constante_1$
$\frac{dy}{dt} = constante_2$
$\frac{dz}{dt} = constante_3 - gt$

Ces équations sont valables entre le lancer et la réception de la balle. Et donc en particulier à t=0. Or à t=0 :

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$
$\frac{dy}{dt} = 0$
$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\theta$

On a donc :

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$
$\frac{dy}{dt} = 0$
$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\theta - gt$

En intégrant on obtient (vérifier qu'en dérivant on retrouve bien l'équation précédente) :

$x = v_0 t \cos\theta + constante_4$
$y = 0 + constante_5$
$z = v_0 t \sin\theta + constante_6 + \frac{gt^2}{2}$

Or à t=0 le ballon est en 0 donc ces trois contantes sont nulles, et finallement :

$x = v_0 \cos\theta t$
$y = 0$
$z = v_0 \sin\theta t - \frac{gt^2}{2}$

Celui qui reçoit le ballon a les mains à peu près au même niveau que celui qui a lancé donc le point de réception du ballon aura pour coordonnées (L,0,0). La réception du ballon se fait à $t = \tau$

L'équation en y ne nous apprend pas grand chose. Dans celle de x nous ne connaissons ni L , ni τ. Celle de z, vut que l'on sait qu'à la réception z=0, va nous donner τ :

$0 = v_0 \sin\theta\tau - \frac{g\tau^2}{2}$

$\tau = 0$ correspond au lancer. C'est évident que ce n'est pas une solution pour la réception. Donc on peut simplifier cette équation par τ. On obtient : $\tau = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

On reporte dans l'équation concernant x pour obtenir L :

$L = v_0 \cos\theta \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$

On veut maximiser L. Or lorsque une fonction atteint un maximum, sa dérivée est nulle. On va donc dériver L par rapport à θ et chercher quand cette dérivée est nulle.Or $2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta$, ce qui simplifie $L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$\frac{dL}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}$

$\frac{dL}{d\theta} = 0$ si $\cos 2\theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\Pi}{4} = 45$ degrés.