Flocon de Von Koch et approximation de Pi

Vincent Pilaud

Février 2004

1 Préliminaire

1.1 Calculs d'aire

Soit ABC un triangle de cotés de longueur $AB = x$, $AC = x$ et $BC = y$.

Question 1 *Montrer que l'aire du triangle ABC vaut :*

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{y\sqrt{4x^2 - y^2}}{4}$$

Question 2 *En déduire l'aire d'un triangle équilatéral de côté x.*

1.2 Calculs de sommes de suites arithmétiques et géométriques

Question 3 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \mu + x_n \end{cases}$$

Montrer (par récurrence) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{(n+1)(2x_0 + n\mu)}{2} = (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)\mu}{2}$$

Question 4 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :*

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \mu x_n \end{cases}$$

Montrer (par récurrence) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 \frac{1 - \mu^{n+1}}{1 - \mu}$$

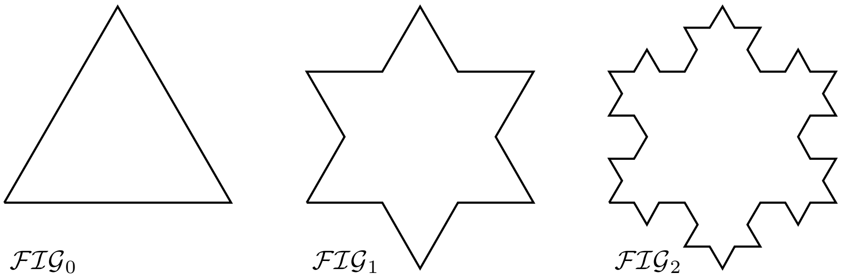
2 Flocon de Von Koch

2.1 Description du problème

On se donne un triangle équilatéral de côté x.

A la première étape, on divise en trois chaque côté du triangle, et on supprime le tiers central que l'on remplace par deux cotés de même longueur tournés vers l'extérieur (cf dessin !).

A chaque étape, on remplace le tiers central de chaque segment par deux côtés de même longueur tournés vers l'extérieur.



$\mathcal{FIG}_0$ $\quad$ $\mathcal{FIG}_1$ $\quad$ $\mathcal{FIG}_2$

On appelle $\mathcal{FIG}_n$ la figure obtenue après la n-ième étape.

2.2 Calcul du périmètre et de l'aire

Question 5 *On appelle $\mathcal{P}_n$ le périmètre de $\mathcal{FIG}_n$, c_n le nombre de côtés et l_n la longueur de ces côtés.*

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 4^n.3 \text{ et } l_n = \frac{x}{3^n}$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = (\frac{4}{3})^n 3x$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \infty$$

Question 6 *On appelle $\mathcal{A}_n$ l'aire de $\mathcal{FIG}_n$, k_n le nombre de petits triangles rajoutés à l'étape n et a_n l'aire de ces petits triangles.*

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, k_n = 4^{n-1}.3 \text{ et } a_n = \frac{\mathcal{A}_0}{9^n}$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0[1 + \sum_{k=1}^{n}(\frac{4^{k-1}.3}{9^k})] = \frac{x^2\sqrt{3}}{20}[8 - 3(\frac{4}{9})^n)]$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \frac{2x^2\sqrt{3}}{5}$$

Question 7 *Montrer que la figure reste toujours inscrite dans le cercle circonscrit au triangle de départ.*

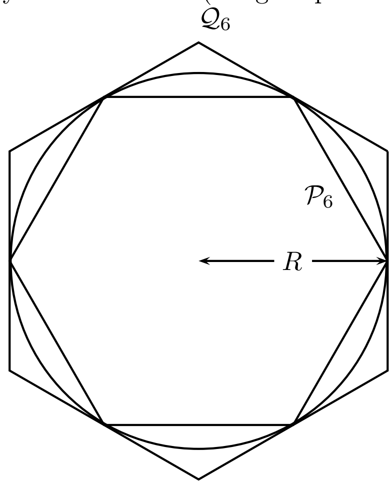
Remarque 1 *On note donc que l'on obtient une série de figures dont l'aire reste bornée tandis que le périmètre tend vers ∞.*

3 Approximation de Pi

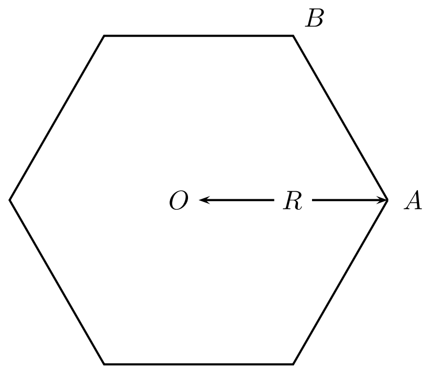
3.1 Description de la méthode

On sait que l'aire du cercle est : $\mathcal{A} = \pi R^2$. On va ici trouver un encadrement de π en trouvant un encadrement de l'aire du cercle.

On considère pour $n \in \mathbb{N}$ les deux polygones réguliers à n côtés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$ tels que le cercle circonscrit à $\mathcal{P}_n$ soit le cercle inscrit dans $\mathcal{Q}_n$. On appelle R le rayon de ce cercle. (cf figure pour $n = 6$).



3.2 Calcul de l'aire d'un polygone



On appelle rayon du polygone régulier le rayon de son cercle circonscrit (ici R).

Question 8 *En considérant le triangle OAB, calculer l'aire d'un polygone à n côtés de rayon R.*

3.3 Encadrement

Question 9 *Donner l'aire de $\mathcal{P}_n$.*
Calculer le rayon de $\mathcal{Q}_n$ et en déduire son aire.

Question 10 *En déduire des encadrements de π de plus en plus fins.*
Combien de côtés doit avoir le polygone pour avoir une approximation de π à 10^{-5} près (donc 5 chiffres significatifs).

Remarque 2 *Le logiciel "Maple" donne 10000 chiffres significatifs instantanément.*

4 Correction

4.1 Préliminaire

Question 1 *On calcule la longueur de la hauteur issue de A par le théorème de Pythagore :*

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{x^2 - (\frac{y}{2})^2} = \frac{\sqrt{4x^2 - y^2}}{2}$$

On en déduit la formule :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AH.BC}{2} = \frac{y\sqrt{4x^2 - y^2}}{4}$$

Question 2 *On a donc pour un triangle équilatéral ($x = y$) :*

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{x\sqrt{4x^2 - x^2}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Question 3 *Montrons par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\mu + x_0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} x_k = (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)\mu}{2}$$

1. *Le résultat est clairement vrai pour $n = 0$,*
2. *Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons qu'alors il est vrai au rang $n + 1$:*

$$x_{n+1} = \mu + x_n = \mu + n.\mu + x_0 = (n+1)\mu + x_0$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x_k &= \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \\ &= (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)\mu}{2} + (n+1)\mu + x_0 \\ &= (n+2)x_0 + \frac{(n+1)(n+2)\mu}{2}\end{aligned}$$

Remarque 3 *On peut bien sûr obtenir le résultat sans refaire la récurrence si on connaît déjà $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Il suffit de dire que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = n\mu + x_0$ et d'écrire :*

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} k\mu + x_0 = (n+1)x_0 + \mu\sum_{k=0}^{n} k = (n+1)x_0 + \mu\frac{n(n+1)}{2}$$

Question 4 *Montrons par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \mu^n x_0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}$$

1. *Le résultat est clairement vrai pour $n = 0$,*
2. *Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons qu'alors il est vrai au rang $n + 1$:*

$$x_{n+1} = \mu x_n = \mu.\mu^n x_0 = \mu^{n+1}x_0$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x_k &= \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \\ &= x_0\frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu} + \mu^{n+1}x_0 \\ &= x_0\frac{1-\mu^{n+1} + (1-\mu)\mu^{n+1}}{1-\mu} \\ &= x_0\frac{1-\mu^{n+2}}{1-\mu}\end{aligned}$$

4.2 Flocons de Von Koch

Question 5 *On montre le résultat par récurrence :*

- *Le résultat est vrai pour $n = 0$ car il y a bien trois côtés, qui sont tous les trois de longueur x.*
- *Supposons le résultat vrai au rang n et montrons qu'alors il est vrai au rang $n+1$: à l'étape $n+1$, chaque côté est divisé en trois, donc $l_{n+1} = \frac{l_n}{3} = \frac{x}{3^{n+1}}$, et on remplace un côté par quatre segments, donc $c_{n+1} = 4c_n = 4^{n+1}.3$.*

On en déduit immédiatement que :

$$\mathcal{P}_n = l_n.c_n = 4^n.3.\frac{x}{3^n} = (\frac{4}{3})^n 3x$$

et donc, puisque $\frac{4}{3} > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \infty$$

Question 6 *On ajoute autant de carrés à l'étape n qu'on a de côtés à l'étape $n-1$, donc $k_n = c_{n-1} = 4^{n-1}.3$.*

L'aire est proportionnelle au carré du triangle ajouté, donc à $l_n^2 = \frac{x^2}{9^n}$, et pour $n = 1$, $a_n = \frac{\mathcal{A}_0}{9}$, donc on a bien le résultat. On en déduit en faisant la somme que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n &= \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{n} k_j.a_j = \mathcal{A}_0 + \sum_{j=1}^{n} 4^{j-1}.3.\frac{\mathcal{A}_0}{9^j} = \mathcal{A}_0[1 + \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{4}{9})^j] \\
&= \mathcal{A}_0[1 + \frac{1}{3}\frac{1-(\frac{4}{9})^n}{1-\frac{4}{9}}] = \frac{x^2\sqrt{3}}{20}[8 - 3(\frac{4}{9})^n)]
\end{aligned}$$

et donc, puisque $\frac{4}{9} < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \frac{2x^2\sqrt{3}}{5}$$

4.3 Approximation de Pi

Question 7 *On rappelle que l'angle au centre du polygone régulier à n côtés est $\alpha_n = \frac{2\pi}{n}$.*

On calcule la longueur de la hauteur du triangle OAB issue de O : $OH = R.\cos(\frac{\alpha_n}{2})$.

On calcule la longueur du côté AB : $AB = 2R.\sin(\frac{\alpha_n}{2})$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{n,R} &= n\mathcal{A}_{OAB} = n\frac{AB.OH}{2} = \frac{nR^2}{2}.2\cos(\frac{\alpha_n}{2})\sin(\frac{\alpha_n}{2}) \\
&= \frac{nR^2}{2}\sin(\alpha_n) = \frac{nR^2}{2}\sin(\frac{2\pi}{n})
\end{aligned}$$

Question 8 *On a donc :*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} = \frac{nR^2}{2}\sin(\frac{2\pi}{n})$$

et comme le rayon de $\mathcal{Q}_n$ est $\frac{R}{\cos(\frac{\alpha_n}{2})}$, on a :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{Q}_n} = nR^2\tan(\frac{\pi}{n})$$

Question 9 *On a donc : $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} < \mathcal{A}_{\mathcal{C}} < \mathcal{A}_{\mathcal{Q}_n}$ et donc : $\frac{n}{2}\sin(\frac{2\pi}{n}) < \pi < n\tan(\frac{\pi}{n})$.*

On a maintenant un problème pour calculer $\sin(\frac{2\pi}{n})$ et $\tan(\frac{\pi}{n})$. On ne sait en général pas les calculer, mais on connaît une formule de récurrence si n est une puissance de 2 :

$$\cos(\frac{2\pi}{2^k}) = \sqrt{1 + \cos(\frac{2\pi}{n^{k-1}})^2}$$

On peut donc calculer par récurrence, et on obtient des approximations de π successives :

k	*2*	*3*	*4*	...	*12*
$\cos(\frac{2\pi}{2^k})$	0	0.70711	0.92388	...	*0.99999882*
$\frac{2^k}{2}\sin(\frac{2\pi}{2^k})$	*2*	*2.82843*	*3.06147*	...	*3.141591*
$2^k\tan(\frac{\pi}{2^k})$	*4*	*3.31371*	*3.18260*	...	*3.141593*

On vérifie qu'il faut aller jusqu'à $n = 2^{12} = 4096$ pour obtenir une approximation avec 5 chiffres significatifs.

Remarque 4 *On aurait aussi pu obtenir une approximation de π avec le périmètre du cercle.*