Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris 7 mars 2006

Séries de Fourier

1 Coefficients de Fourier

Exercice. [Fonctions périodiques]
1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+a) = f(x)\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est soit constante, soit non-périodique, soit périodique avec une plus petite période.
3. Que dire lorsque f n'est plus supposée constante ?

Exercice. [Convolution et série de Fourier]
1. Soient f et g deux fonctions continues 2π-périodiques. Montrer que les fonctions $f \star g$ (convolution de f et g) et $\tau_a f$ (translation de f) définies par

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt \quad \text{et} \quad \tau_a f(x) = f(x-a)$$

sont bien définies, continues et 2π-périodiques.
2. Montrer que

$$c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g) \quad \text{et} \quad c_n(\tau_a f) = e^{ian} c_n(f).$$

3. Pour $0 < \varepsilon \leq \pi$, on définit les fonctions 2π-périodiques signal σ_ε et triangle Δ_ε par

$$\sigma_\varepsilon(x) = \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) \quad \text{et} \quad \Delta_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x),$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A. Montrer que la fonction triangle est la convolée d'une fonction signal par elle-même. En déduire les coefficients de Fourier de la fonction triangle.

Exercice. [Décroissance des coefficients de Fourier]
1. Énoncer et montrer le lemme de Riemann-Lebesgue.
2. Montrer que si f est 2π-périodique, C^k et C^{k+1} par morceaux, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

2 Convergence de la série de Fourier

2.1 Convergence quadratique

Exercice. [Inégalité de Bessel et égalité de Parseval]
1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée dénombrable infinie d'un espace préhilbertien E de dimension infinie. Montrer que pour tout $x \in A$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n|x\rangle|^2$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n|x\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Montrer que si la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale (ie. orthonormée et telle que $vect_{n\in\mathbb{N}}(x_n)$ est dense dans E), alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n|x\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Exercice. [Conséquences]

1. Montrer que les deux produits hermitiens

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt \quad \text{et} \quad f\cdot g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g)$$

coïncident.

2. Montrer que l'application

$$c : \left\{ \begin{array}{ccc} C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \ell^2(\mathbb{C}) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est bien définie et injective.

2.2 Convergence simple et uniforme

Exercice. [Convergence uniforme]

1. Soit f continue 2π-périodique. Montrer que si $\sum |a_n(f)|$ et $\sum |b_n(f)|$ convergent, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f. En déduire que si $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

2. Montrer que si f est continue et C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge uniformément vers f.

Exercice. [Phénomène de Gibbs]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1$ sur $[0,\pi[$ et $f(x) = -1$ sur $[\pi, 2\pi[$.

1. Montrer que la n-ième somme partielle de f s'écrit

$$S_n(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

2. Étudier la suite des différences $(f - S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Que dire de la convergence de la série de Fourier de f ?

Exercice. [Théorème de Dirichlet]

1. On définit le noyau de Dirichlet par $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$. Montrer que $D_n(t)$ vérifie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad D_n(t) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. Montrer que si f est C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Exercice. [Théorème de Fejer]

1. On définit le noyau de Fejer par $K_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$. Montrer que $K_n(t)$ vérifie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(t)dt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad K_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)^2}{n\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}.$$

2. Montrer que si f est continue, alors $(\sigma_n(f))_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Exercice. [Théorème de Jackson]

On définit le noyau de Jackson par

$$J_n(t) = \frac{K_n(t)^2}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)^2 dt}.$$

1. Montrer que

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t.$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)^2 dt \geq An \quad \text{où} \quad A = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 du.$$

3. En déduire que pour $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k J_n(t)dt = O(n^{-k}).$$

3 Applications

Exercice. [Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$]

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ est bien définie.
2. On propose deux méthodes pour calculer sa somme :

(i) utiliser le théorème de convergence radiale d'une série entière.

(ii) utiliser le théorème de Dirichlet sur la fonction signal $\sigma_x(t) = \chi_{[-x,x]}(t)$.

Exercice. [$\zeta(2)$]

1. Pour quelles valeurs de x, la quantité

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

est-elle bien définie ?

2. Calculer $\zeta(2)$ en développant en série de Fourier

(i) la fonction $x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$.

(ii) la fonction $x \mapsto |x|$.

Exercice. [Une inégalité]

Soit f une fonction 2π-périodique, C^1 et de moyenne nulle (ie. $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$). Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice. [Polynômes de Tchébytchev -Théorème de Weierstrass]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\leq n$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

2. En utilisant le théorème de Fejer, montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice. [Sommes de Gauss]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme de Gauss

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}.$$

On pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi n x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} I_1,$$

$$E_n = \sum_{m \in 2\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{2i\pi(nx^2+mnx)} dx \qquad \text{et} \qquad O_n = \sum_{m \in 2\mathbb{Z}+1} \int_0^1 e^{2i\pi(nx^2+mnx)} dx$$

1. Montrer que $E_n = I_n$ et $O_n = i^{-n} I_n$.
2. Soit f la fonction 1-périodique définie par

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{(k+t)^2}{n}}.$$

a. Montrer que f est continue et C^1 par morceaux.
b. En déduire que $\frac{1}{n} S_n = E_n + O_n$, puis que

$$S_n = \frac{(1+i^{-n})(1+i)\sqrt{n}}{2} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 0 \ [4] \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1 \ [4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2 \ [4] \\ i\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 3 \ [4] \end{cases}$$

Exercice. [Fonctions continues nulle part dérivables]

RAPPELS

Il existe des fonctions continues nulle part dérivables : c'est par exemple le cas de $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$, où Δ désigne la fonction 1-périodique définie sur $[-1,1]$ par $\Delta(x) = |x|$. Le théorème de Baire permet par ailleurs de montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues. Le but de ce qui suit est de montrer qu'il existe des fonctions continues nulle part dérivables arbitrairement proches de l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes.

A. UNE CLASSE DE SÉRIES LACUNAIRES SANS DÉRIVÉE

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de absolument convergente. Soient $q > 1$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_{n+1} \geq q\lambda_n$. On définit

$$f(t) = \varepsilon_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 < |k| < \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n, \lambda_n - \lambda_{n-1}) \Rightarrow c_{\lambda_n - k}(f) = 0.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq p < \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) J_p(t) e^{-i\lambda_n t} dt.$$

3. On suppose que f est dérivable en 0 et que $f(0) = f'(0) = 0$. En utilisant le théorème de Jackson, montrer que $\varepsilon_n = o(\lambda_n^{-1})$.

4. Montrer que si f est dérivable en un point, alors $\varepsilon_n = o(\lambda_n^{-1})$.

5. En déduire que $g(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^{i\lambda_n t}}{\lambda_n}$ est nulle part dérivable.

B. Modules de continuité

Un module de continuité est une application $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que

(i) $\Phi(0) = 0$,

(ii) Φ est continue croissante,

(iii) Φ est sous-additive (ie. $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(t_1 + t_2) \leq \Phi(t_1) + \Phi(t_2)$).

1. Montrer que pour tout $t, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\Phi(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\Phi(t)$.

2. Soit f une fonction continue périodique. Montrer que l'application ω_f définie par $\omega_f(t) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid u, v \in \mathbb{R}, |u - v| \leq t\}$ est un module de continuité.

3. Soit Φ un module de continuité. On pose

$$\Psi(t) = \sup\{\sum \lambda_i \Phi(t_i) \mid t = \sum \lambda_i t_i,\ \lambda_i, t_i \geq 0 \text{ et} \sum \lambda_i = 1\}.$$

(i) En utilisant l'inégalité du B1, montrer que $\Phi \leq \Psi \leq 2\Phi$ et en déduire que Ψ est bien défini.

(ii) Montrer que Ψ est concave.

(iii) Montrer qu'une fonction concave nulle en 0 est sous-additive.

(iv) Montrer que Ψ est un module de continuité.

C. Fonctions nulle part dérivables arbitrairement proches des fonctions lipschitziennes

Soit Φ un module de continuité et f une fonction continue périodique. On dit que f est Φ-lipschitzienne, et on note $f \in C^\Phi$, s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\omega_f(t) \leq M\Phi(t)$.

Toute fonction f de C^{Id} est à variation bornée donc peut s'écrire $f = g - h$ avec g et h croissantes. Par conséquent, f est presque partout dérivable. Le but de ce qui suit est de montrer que pour tout module de continuité Φ tel que $\limsup_{h \to 0} \frac{\Phi(h)}{h} = +\infty$, il existe une fonction Φ-lipschitzienne nulle part dérivable.

1a. Montrer que l'on peut supposer que Φ est concave.

b. Montrer que $h > 0 \Rightarrow \Phi(h) > 0$.

c. Soit a tel que $\Phi(2^{-a}) \geq 2^{-a}$. Pour tout $j \geq 1$, on définit $h_j = 2^{-j-a+1}$ et $N_j = \left[\frac{\Phi(h_j)}{h_j}\right]$. Montrer que N_j est une suite croissante d'entiers ≥ 1 qui tend vers $+\infty$.

On construit par récurrence la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- $\lambda_1 = 1$,
- si $1 \leq n \leq N_1$, $\lambda_{n+1} = 2\lambda$,
- si $N_1 \leq n$, on note j_n le plus grand entier tel que $N_{j_n} \leq n$, et on choisit

$$\lambda_{n+1} \geq \max(2\lambda_n, \frac{2^n}{\Phi(h_{j_n})}).$$

On pose
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{i\lambda_n t}}{\lambda_n}.$$

2a. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n>N_j} \frac{1}{\lambda_n} \leq \Phi(h_j).$$

b. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $|e^{ia} - e^{ib}| \leq \min(|a-b|, 2)$.
c. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\omega_f(h_j) \leq 3\Phi(h_j)$.
d. Montrer que

(i) si $h \leq 2^{-a}$, alors $\omega_f(h) \leq 6\Phi(h)$,

(ii) si $h > 2^{-a}$, alors $\omega_f(h) \leq 2\|f\|_\infty \leq 2 \leq 2^{a+1}\Phi(h)$.

3. Montrer que f est nulle part dérivable. Conclure.

Exercice. [Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier]

1. Soit $f = \sum c_n(f)e^{int}$ une série de Fourier avec $c_0(f) = 0$ et $c_n(f) \geq 0$. Montrer que $F(t) = \int_0^t f(u)du$ est continue 2π-périodique à coefficients de Fourier positifs. En déduire que $\sum \frac{c_n(f)}{n}$ converge.

2. Montrer que $\sum \frac{\sin nt}{\ln n}$ est partout convergente mais n'est pas une série de Fourier.