Vincent Pilaud
Kholles de mathématiques
MP* - Lycée Charlemagne - Paris
10 janvier 2006

Intégrale sur un intervalle quelconque

Exercice. [Intégrale d'une fonction strictement positive]
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$. Montrer que f est nulle.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ intégrable. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt > 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ intégrable. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$ si et seulement si $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice. [Calcul d'une intégrale]
1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ intégrable. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$
2. Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}dt$$
converge et calculer sa valeur.
3. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}dt$$

Exercice. [Primitive d'une fonction L^2]
Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ de carré intégrable. Montrer que
$$\int_0^x f(t)dt = o_{x\to\infty}(\sqrt{x}).$$

Exercice. [Somme de Riemann]
1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \leq n$,
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)dt.$$
2. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Exercice.
Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que
$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

On pose

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. On suppose que f est continue. Calculer $F'(x)$.
2. Montrer alors que $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
3. Montrer que le résultat reste vrai pour tout f dans L^p.

Exercice. [Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes]

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

Exercice.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Montrer que f est nulle.